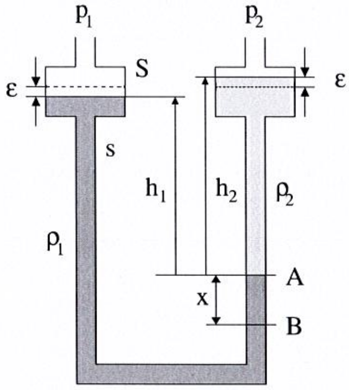
Contrôle de Mécanique des fluides - Session 2

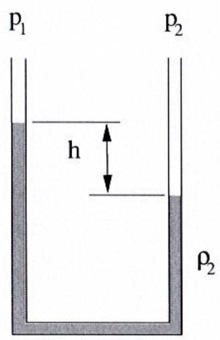
21 juin 2022 – durée : 1 heures 30

Sans document - calculatrices collège ou mode examen autorisées

Exercice 1

Un manomètre constitué d'un tube en U se section s et de deux réservoirs de section S où se trouvent les surfaces libres des 2 liquides. Les deux liquides sont au repos et incompressibles. Le tube en U de la figure de droite est étudié à la question 2.d.





1. Lorsque les pressions p_1 et p_2 sont égales à la pression atmosphérique (manomètre ouvert par exemple), l'interface des deux liquides de masse volumique ρ_1 et ρ_2 se trouve en A et les surfaces libres des deux liquides sont respectivement situées à des hauteurs h_1 et h_2 par rapport à A (voir figure).Donner la relation entre h_1, h_2, ρ_1 et ρ_2.

2. Lorsqu'on le manomètre est raccordé et que la pression p_2 est supérieure à la pression p_1, l'interface se déplace de x au point B et les surfaces libres de ε (traits pointillés sur la figure).

   (a) Les fluides étant incompressibles, donner l'expression de ε en fonction de s, S et x.

   (b) Exprimer la différence de pression $\Delta p = p_2 - p_1$ en fonction de x, ρ_1, ρ_2, g, s et S (indication : utiliser la relation établie à la question 1 (qui reste valable) et l'expression de ε établie à la question précédente).

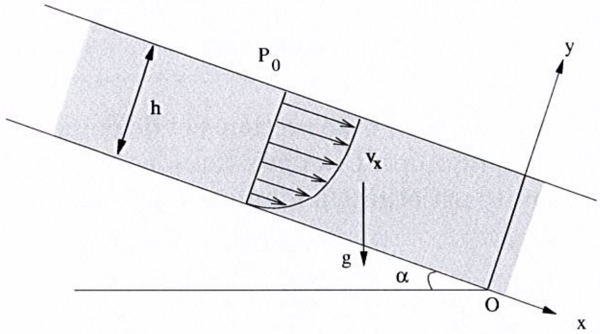
   (c) Faire l'application numérique donnant la valeur de $p_2 - p_1$.

   (d) Calculer la hauteur h correspondant à la même différence de pression $p_2 - p_1$ que l'on obtiendrait avec le tube en U de la figure de droite.

AN : $x = 10\ cm$, $S/s = 200$, $\rho_1 = 1.024.10^3\ kg/m^3$, $\rho_2 = 10^3\ kg/m^3$, $g = 10\ m.s^{-2}$.

Exercice 2

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$: vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-dessous). On note h l'épaisseur constante de l'écoulement, et P_0 la pression atmosphérique à la surface libre.



1. (2 pts) En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x\ \vec{e}_x\ \ (V_y = 0)$, montrer que la composante V_x ne dépend que de y. En déduire l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère Oxy et utiliser les équations de Navier-Stokes du formulaire).
2. Montrer que la pression $p(x, y)$ a pour expression :

$$p(y) = (h - y)K_1 + K_2$$

où K_1 et K_2 sont des constantes à préciser.
3. (1 pt) Écrire la première équation de Navier Stokes (projection sur l'axe x). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse V_x.
4. (1 pt) Déterminer l'expression de $V_x(y)$.
5. (1 pt) On donne la condition limite à la surface libre $(y = h)$: $\dfrac{dV_x}{dy} = 0$.

En précisant la condition limite à la paroi $(y = 0)$, déduire l'expression du champ des vitesses en fonction de ρ, g, α, h, y et μ.
6. (1 pt) En déduire la forme du profil et dire comment varie la vitesse en fonction de la viscosité (sans faire de calcul).
7. (1 pt) Calculer la vitesse moyenne V_m.

Formulaire :

Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

$$\rho\frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\ p + \mu\vec{\Delta}\vec{V} + \rho\vec{g}$$

avec : $\vec{\Delta}\vec{V} = \Delta V_x\vec{e}_x + \Delta V_y\vec{e}_y$ et $\Delta f(x, y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en deux dimensions.