ETUDE D'UN PENDULE ASYMETRIQUE

(Aucun document autorisé - Calculatrice non autorisée)

On considère un système mécanique rigide S en mouvement dans l'espace rapporté au repère orthonormé et galiléen $R = (O, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$. On suppose l'existence d'un champ de pesanteur défini par : $\vec{g} = -g\,\vec{y}$.

Le système S est une plaque carrée rigide homogène évidée. Plus précisément, on modélise la géométrie de S comme un milieu bidimensionnel dont ρ_s définit la densité surfacique de masse : c'est un carré de côté 4a que l'on a évidé d'un cercle de centre G_1 et de rayon a. Si l'on considère que le point géométrique G_1 peut être pris comme appartenant au prolongement de S, alors on construit le repère lié à S comme étant le repère orthonormé $R_s = (O_s = G_1, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ de telle sorte que le plan $(G_1, \vec{I}, \vec{J})$ définisse le plan de S et que $\vec{K} = \vec{I} \wedge \vec{J}$. Si l'on note G_2 le centre de masse de la plaque non évidée, G_1 est défini par :

$$\overrightarrow{G_2G_1} = -a\,\vec{I} + a\,\vec{J}$$

G désigne le centre de masse de S et m sa masse totale. On note P la plaque non évidée dont m_2 est la masse et D le disque oté de l'évidement dont m_1 est la masse.

On donne dans R_s :

$$\begin{cases} \overrightarrow{GG_1} = \dfrac{16\,a}{(16-\pi)}\left(-\vec{I}+\vec{J}\right) = u\left(-\vec{I}+\vec{J}\right) \text{ où } u = \dfrac{16\,a}{(16-\pi)} \\ \overrightarrow{GG_2} = \dfrac{\pi\,a}{(16-\pi)}\left(-\vec{I}+\vec{J}\right) = v\left(-\vec{I}+\vec{J}\right) \text{ où } v = \dfrac{\pi\,a}{(16-\pi)} \end{cases}$$

On donne également la matrice d'inertie de S dans son repère lié :

$$\left[J_{O_s}(S)\right]^{R_s} = \frac{a^2\,m}{16-\pi}\begin{pmatrix} A' & C' & 0 \\ C' & A' & 0 \\ 0 & 0 & B' \end{pmatrix}$$

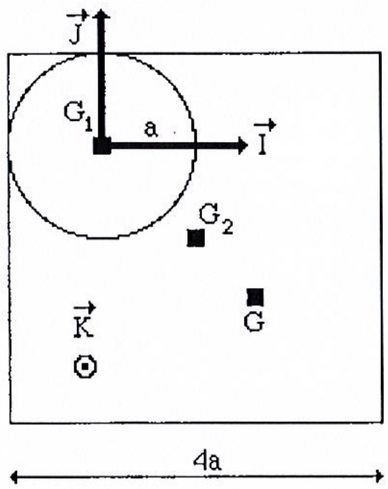
avec :

$$A' = \frac{448-3\pi}{12} \qquad B' = 2\left(\frac{448-3\pi}{12}\right) \qquad C' = 16$$

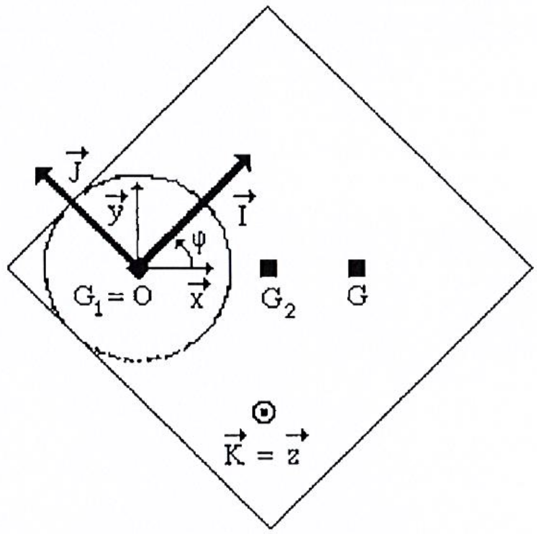
Dans la suite du problème, afin d'alléger les notations, on effectuera les calculs avec :

$$\left[J_{O_s}(S)\right]^{R_s} = m\begin{pmatrix} A & C & 0 \\ C & A & 0 \\ 0 & 0 & B \end{pmatrix}$$

A la place de l'évidement, on installe un axe ($O = G_1$, $\vec{z}$) indéformable de rayon a solidaire d'un bâti fixe dont R est le repère lié. On suppose en outre qu'il astreint, à tout instant, le plan ($\vec{I}$, $\vec{J}$) du système S à rester dans le plan ($\vec{x}$, $\vec{y}$). Enfin, le contact entre cet axe et S est supposé en tout point sans frottement. On pose $\varphi = (\widehat{\vec{x}, \vec{I}})$.



Le système dans son repère lié



Le système en mouvement

1. CINEMATIQUE (le repère R_s est utilisé comme repère de projection)

1.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 et G du torseur cinématique de S par rapport à R.

1.2. Donner l'expression de l'accélération par rapport à R du point G.

2. CINETIQUE (le repère R_s est utilisé comme repère de projection)

2.1. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur cinétique de S par rapport à R.

2.2. Donner l'expression des éléments de réduction en G_1 du torseur dynamique de S par rapport à R. On projettera également les éléments de ce torseur dans R.

2.3. Donner l'expression de l'énergie cinétique de S par rapport à R.

3. DYNAMIQUE (le repère R est utilisé comme repère de projection)

3.1. A quel type de liaison classique, la liaison entre l'axe rigide et S vous fait elle penser ? Est-ce une liaison parfaite ? Quelle solution préconisez vous pour la modéliser ? Donner la forme et si c'est possible, l'expression précise de ses éléments de réduction en G_1 ainsi que l'expression de sa puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont cette action dérive.

3.2. Donner la forme et quand c'est possible, l'expression précise des éléments de réduction en G_1 des autres actions agissant sur S. Pour chacun d'elles, donner l'expression de la puissance développée dans le mouvement repéré par rapport à R et éventuellement le potentiel dont elles dérivent.

3.3. Appliquer le Principe Fondamental de la Dynamique à S en G_1 (on écrira l'ensemble des équations scalaires qu'il induit).

3.4. En supposant que les équations du mouvement sont résolues, c'est-à-dire que la fonction $\varphi(t)$ est connue, montrer que l'on peut donner l'expression des éléments de réduction du torseur des actions entre l'axe et le système.

3.5. En déduire l'équation du second ordre qui gouverne l'évolution du paramètre φ.

3.6. En appliquant le Théorème de l'Energie Cinétique à S, montrer que l'équation qui gouverne l'évolution du paramètre φ s'écrit (K étant une constante) :

$$\dot{\varphi}^2 = -\frac{2\,g\,u}{B}\left(-\cos\varphi + \sin\varphi\right) + K$$

Vérifier qu'elle est bien équivalente à l'équation du 3.5.

4. ETUDE DES POSITIONS D'EQUILIBRE ET MOUVEMENT PARTICULIER

4.1. Trouver les positions d'équilibre du mouvement et discuter leur stabilité.

4.2. On souhaite étudier le mouvement particulier du système lorsque celui-ci est abandonné sans vitesse initiale à $t_0 = 0$, à partir de la position :

$$\varphi_0 = \varepsilon_0 + \varphi_E^S \quad \text{où} \begin{cases} \varepsilon_0 \text{ est voisin de 0 mais strictement positif} \\ \varphi_E^S \text{ est la position d'équilibre stable} \end{cases}$$

4.2.1. Donner l'équation du mouvement linéarisé.

4.2.2. Résoudre l'équation et donner la période des oscillations du mouvement.