Université de Bourgogne
Examen de Méthodes Mathématiques - Juin 2022
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. On étudie le mouvement de deux oscillateurs x_1, x_2 (masse m, constante de raideur k) couplés :

$$\begin{cases} m\ddot{x}_1 = -kx_1 + k(x_2 - x_1) \\ m\ddot{x}_2 = -kx_2 - k(x_2 - x_1) \end{cases}$$

1. a) On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$.
   Mettre ce système se met sous la forme matricielle
   $$\ddot{X} = -\Omega X \text{ avec } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$
   et Ω une matrice à determiner.
   b) Montrer que la matrice Ω est hermitienne.
2. Déterminer les valeurs propres λ_i et les vecteurs propres (normés) associés $|u_i\rangle$ de Ω.
3. A l'aide du théorème de décomposition spectrale $f(\Omega) = \sum_i f(\lambda_i)|u_i\rangle\langle u_i|$,
   a) calculer $\Omega_0 = \sqrt{\Omega}$,
   b) montrer que
   $$\cos(\sqrt{\Omega}\, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) \\ \cos(\omega_0 t) - \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) & \cos(\omega_0 t) + \cos(\sqrt{3}\omega_0 t) \end{pmatrix},$$
   $$\sin(\sqrt{\Omega}\, t) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sin(\omega_0 t) + \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) - \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \\ \sin(\omega_0 t) - \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) & \sin(\omega_0 t) + \sin(\sqrt{3}\omega_0 t) \end{pmatrix}.$$
4. On admet que les solutions du système d'équations différentielles s'écrivent
   $$X(t) = \cos(\Omega_0 t)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \sin(\Omega_0 t)\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$$
   avec a, b, c, d des constantes.
   Calculer la dérivée $\dot{X}$.
   Remarque : on admet que les dérivées vérifient au sens du produit matriciel
   $$\frac{d\cos(\Omega_0 t)}{dt} = -\Omega_0 \sin(\Omega_0 t), \qquad \frac{d\sin(\Omega_0 t)}{dt} = \Omega_0 \cos(\Omega_0 t).$$
5. Etablir la forme du mouvement $X(t)$ en prenant comme conditions initiales
   $$X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \dot{X}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice II. Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx.$$

Soit la fonction

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \le a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x)$.
2) Représenter les graphes de $f_a(x)$ et de sa transformée de Fourier pour $a = 3$.
3) Evaluer alors
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ka)\cos(kx)}{k}dk.$$
4) En déduire la valeur de
$$\int_{0}^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y}dy.$$