Mathématiques L3 SPI Mécal

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE

EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JANVIER 2022

*Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.*

**Exercice I.**

a) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = axt, \tag{1}$$

où $a$ est une constante réelle

b) Résoudre l'équation différentielle

$$\frac{dx}{dt} = Axt, \tag{2}$$

où $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{bmatrix}$ est une matrice réelle.

Pour calculer une fonction $f$ de la matrice $A$, on utilisera le théorème de décomposition spectrale : $f(A) = \sum_i f(\lambda_i)|u_i\rangle\langle u_i|$ avec les valeurs propres $\lambda_i$ et les vecteurs propres (normés) associés $|u_i\rangle$ de $A$.

**Exercice II.**

A) On résout l'équation différentielle de Laguerre, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$xy'' + (1-x)y' + \alpha\, y = 0. \tag{3}$$

1) Montrer que $x = 0$ est une singularité régulière.

2) A partir du développement en série

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{k+n}, \tag{4}$$

(a) déterminer l'équation indicielle ;

(b) déterminer la relation de récurrence entre $a_{n+1}$ et $a_n$.

3) Résoudre l'équation indicielle, et en déduire l'expression de la solution

$$y(x) \quad = \quad a_0\left[1 - \alpha x - \frac{\alpha(1-\alpha)}{2^2}x^2 - \frac{\alpha(1-\alpha)(2-\alpha)}{3^2 2^2}x^3 - \dots\right]. \tag{5}$$

4) Quelles sont les valeurs de $\alpha$ qui donnent une série avec un nombre de termes fini ? On les note $y(x) = L_\alpha(x)$. Exprimer $L_1(x)$, $L_2(x)$, $L_3(x)$ et $L_4(x)$ (on choisira la normalisation $a_0 = 1$)

B) Vérifier que

$$y_2(x) = y(x)\ln(x) + \sum_{j=0}^{\infty} b_n x^n \tag{6}$$

est une seconde solution, où $y(x)$ sont les solutions obtenues précédemment.

On reportera $y_2(x)$ dans l'équation et on déterminera la récurrence entre les coefficients $b_{n+1}$ et $b_n$.

**Exercice III.** Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx. \tag{7}$$

Soit la fonction $f$ définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ pour $\gamma > 0$ réel.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. La tracer.
2. Montrer la propriété générale de dualité :

$$\mathcal{F}_\nu[\hat{f}(x)] = f(-\nu). \tag{8}$$

3. En déduire la transformée de Fourier de $g_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ pour a réel positif.

**Exercice IV.** Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{9}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. On suppose un milieu infiniment étendu selon $x$.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale de cette équation et de la condition initiale. On la notera

$$\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx. \tag{10}$$

b) Résoudre l'équation différentielle résultante.

c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Interpréter cette solution.