Examen - Géométrie. Durée 2h00.

Remarque. Dans vos résultats, vous prendrez soin de ne pas laisser des nombres complexes ou des racines carrées au dénominateur. On qualifiera d'expression réduite la forme $a + ib$ où a et b sont des réels.

Exercice 1. Cocyclicité. On se place dans un plan affine euclidien rapporté au plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Soit $z_0 = 2 + \frac{3}{2}\mathrm{i}$. On note $z_1 = -\bar{z}_0, z_2 = \dfrac{1}{z_0}, z_3 = -\dfrac{1}{\bar{z}_0}$.
   (a) Donner les expressions réduites de ces nombres complexes.
   (b) Positionnez les points P, Q, M_0, M_1, M_2, M_3 d'affixes respectives 1, -1, z_0, z_1, z_2, z_3 sur un dessin clair.
   (c) Montrer qu'ils sont cocycliques.
   (d) Préciser le centre et le rayon du cercle passant par ces 6 points.
2. Plus généralement, montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, alors les points d'affixes $1, -1, z, -\bar{z}, \dfrac{1}{z}, -\dfrac{1}{\bar{z}}$ sont cocycliques.

Exercice 2. Similitudes et isométries. On se place dans un plan affine euclidien rapporté au plan complexe $\mathbb{C}$.

1. Reconnaître la nature et donner ses éléments caractéristiques de la transformation du plan qui envoie le point d'affixe z sur le point d'affixe $f_k(z)$ pour $1 \leq k \leq 5$ avec :

$$f_1(z) = 4z - 3\mathrm{i} \qquad f_2(z) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}(z-1) + 1$$

$$f_3(z) = \frac{1}{2}(1 - \mathrm{i}\sqrt{3})z + 2 \qquad f_4(z) = (3 + 4\mathrm{i})z + 10$$

$$f_5(z) = i\bar{z} + 1 - \mathrm{i}$$

2. Sans calcul : quelle est la nature de la transformation $f_2 \circ f_3$? Justifier.
3. Sans calcul : quelle est la nature de la transformation $f_2 \circ f_5$? Justifier.

Exercice 3. Lieu géométrique. Étant donnés deux points distincts A et B du plan et k un réel strictement positif, on désigne par Γ_k l'ensemble des points M du plan distincts de B et tels que $\frac{MA}{MB} = k$.

1. Rappeler la nature de Γ_1.
2. On suppose désormais que $k \neq 1$.
   (a) Démontrer que M appartient à Γ_k si et seulement si le produit scalaire $(\overrightarrow{MA} + k\overrightarrow{MB}) \cdot (\overrightarrow{MA} - k\overrightarrow{MB})$ est nul.
   (b) En déduire que Γ_k est un cercle dont on précisera le diamètre.
3. Dessiner Γ_k pour $k = 1$, $k = \frac{1}{2}$ et $k = \frac{3}{2}$ sur un même graphique.

Exercice 4. Barycentres. On se place dans un espace affine tridimensionnel.

1. Calcul préliminaire : soit $ABCD$ un parallélogramme non aplati. Exprimer C comme barycentre de A, B et D.
2. Soit $OPQRSTUV$ un parallélépipède (solide de l'espace dont toutes les faces sont des parallélogrammes).
   (a) Exprimer U comme barycentre de O, R, P et S.
   (b) On note G le centre de gravité du triangle TQV. Démontrer que G appartient au segment $[OU]$ et préciser sa position sur ce segment.