Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé, 2ème année

Mardi 3 mai 2022
14h-16h

Examen de Mathématiques - Session 1 - Math4B

Exercice 1 (Questions de cours et exercices d'application) :

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée d'ordre n à coefficients réels. Que signifie : la matrice A est orthogonale, rappeler une définition de matrice orthogonale.

   (b) Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

   i. Que signifie : f est un automorphisme orthogonal, rappeler une définition d'automorphisme orthogonal.

   ii. Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E et $\mathcal{B}' = (f(e_1), \dots, f(e_n))$. Montrer l'équivalence : (f est un automorphisme orthogonal) $\Longleftrightarrow$ (La famille $\mathcal{B}'$ est une base orthonormale).

   iii. Exercice : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ des matrices réelles d'ordre n muni du produit scalaire canonique : $(A, B) \mapsto \langle A \mid B \rangle = \mathrm{tr}({}^t\mathrm{AB})$.
   Soit $P \in E$ fixé et $f : E \longrightarrow E$ définie par $f(M) = PM$.

   A. Montrer que f est un endomorphisme de E.

   B. Montrer que f est un automorphisme orthogonal si et seulement si la matrice P est une matrice orthogonale.

2. Soit E un espace euclidien de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E.

   (a) Que signifie : f est un endomorphisme symétrique.

   (b) On suppose que f est un endomorphisme symétrique.
   (i) Montrer que le noyau et l'image de f sont orthogonaux.
   (ii) Montrer que si λ et μ sont deux valeurs propres distinctes de f alors les sous-espaces propres associés E_λ et E_μ sont orthogonaux.

   (c) Donner l'énoncé complet et précis du théorème spectral. On ne demande pas la démonstration.

Exercice 2 (Une isométrie en dimension 3) : Soient E un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E et f un endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal.
2. Déterminer le sous-espace $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ des vecteurs invariants par f et en donner une base orthonormée.
3. Montrer que f est une rotation et préciser : son axe, le sinus et le cosinus de son angle θ.

Pour la suite prendre une nouvelle copie double

Exercice 3 (Réduction d'un endomorphisme) : Soit E un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale de E et f un endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$.

1. Justifier sans calcul que l'endomorphisme f admet une base orthonormale de vecteurs propres.
2. Exprimer $f \circ f$ en fonction de f.
3. En déduire les valeurs propres de f.
4. Donner une base orthonormale de vecteurs propres de f.

Exercice 4 (Étude d'un endomorphisme dépendant de paramètres) : Soit E un espace euclidien de dimension $n \geq 3$. u et v deux vecteurs unitaires de E et orthogonaux et a et b deux réels non nuls. Soit $F = \mathrm{Vect}(u, v)$, $G = F^\perp$ et φ l'application

$$\begin{array}{rccl} \varphi : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x + a\langle x \mid u \rangle u + b \langle x \mid v \rangle v \end{array}$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme symétrique.
2. Quels sont les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ? (On pourra calculer $\varphi(u)$, $\varphi(v)$ et $\varphi(x)$ pour $x \in G$.)
3. Pour tout $x \in E$ calculer $||\varphi(x)||^2 - ||x||^2$.
4. Montrer que φ est un automorphisme orthogonal si et seulement si $a = b = -2$. (Rappelons que $ab \neq 0$) Interpréter φ dans ce cas.