Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé, 2ème année

Mardi 7 juin 2022
13h30-15h30

Examen de Mathématiques - Session 2 - Math4B

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Énoncer et démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité du triangle (Minkowski) en traitant en plus les cas d'égalité.
2. Soit p un projecteur d'un espace préhilbertien E. Les propriétés suivantes sont équivalents :
   (i) p est un projecteur orthogonal.
   (ii) $\forall(x, y) \in E^2 \quad \langle p(x) \mid y\rangle = \langle x \mid p(y)\rangle$.
   (iii) $\forall x \in E, \| p(x) \| \leq \| x \|$.

Exercice 2 : Soient $\alpha,\ \beta, \gamma$ trois paramètres réels et $\varphi : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\varphi(u, v) = \alpha xx' + \beta xy' + 2x'y + yy' + \gamma zz' \quad \text{avec } u = (x, y, z) \text{ et } v = (x', y', z').$$

1. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$ si et seulement si $\Big(\alpha > 4,\ \beta = 2 \text{ et } \gamma > 0\Big)$.
   Dans la suite on prend $\alpha = 6, \beta = 2$ et $\gamma = 1$.
2. Donner l'orthonormalisée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de Gram-Schmitt de la base canonique (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$.
3. Donner le projeté orthogonal (par rapport au produit scalaire φ) du vecteur $a = (1, 3, 5)$ sur le plan $\mathcal{F} = \text{vect}(e_1, e_3)$.
4. Calculer la distance du point $a = (1, 3, 5)$ au plan $\mathcal{F}$.

Exercice 3 : On considère l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ orienté et muni du produit scalaire canonique et f l'endomorphisme dont la matrice associée dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(f) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} a & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & b & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & c \end{pmatrix}$, $a, b, c \in \mathbb{R}$

1. Déterminer les valeurs des paramètres a, b, c pour que f soit un automorphisme orthogonal.
2. Préciser dans ce cas la nature de f. (On donnera tous les détails :nature, sous-espace des vecteurs invariants, angle si c'est une rotation , etc...)

Exercice 4 : Soit $E = \mathbb{R}[X]$ et $F = \mathbb{R}_2[X]$ le sous-espace vectoriel de E des polynômes de degré inférieur ou égal à 2. On considère l'application $B : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$B(P, Q) = P(-1)Q(-1) + \int_{-1}^{1} P'(t)Q'(t)\mathrm{d}t,\ P' \text{ et } Q' \text{sont les polynômes dérivées de } P \text{ et } Q$$

1. Justifier que l'application B définit un produit scalaire sur E. Pour la suite on posera $B(P, Q) = \langle P \mid Q\rangle$.
2. On pose $P_0(X) = 1, P_1(X) = 1 + X$ et $P_2(X) = X^2 + X$.
   (a) Compléter le tableau des produits scalaires suivant

	1	$X+1$	X^2+X	X^3
1	1			-1
$1+X$				
X^2+X			$\frac{14}{3}$	
X^3				$\frac{23}{5}$

   (b) Donner une base orthonormale de F.
   (c) Donner le projeté orthogonal de X^3 sur F.
   (d) Calculer la distance $d(X^3, F)$.
3. Soit α un paramètre réel. On pose $Q_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(X + 1)$, $Q_2 = X^2 - 1$ et f l'endomorphisme de F défini pour tout polynôme $P \in F$ par $f(P) = P + \alpha \langle P \mid Q_1\rangle Q_1$
   (a) Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$ f est symétrique
   (b) Calculer $f(1), f(Q_1)$, et $f(Q_2)$.
   (c) Donner les valeurs propres de f ainsi qu'une base orthonormale de vecteurs propres.
   (d) Quelles sont les valeurs de α pour lesquelles l'endomorphisme f est un automorphisme orthogonal ?
4. **Cette question est facultative.** On considère la forme linéaire $\varphi : F \to \mathbb{R}$ définie pour tout $P \in F$ par $\varphi(P) = P(-1)$.
   (a) Justifier l'existence d'un polynôme $Q_\varphi \in F$ tel que
   $$\forall P \in F, \varphi(P) = \langle Q_\varphi \mid P\rangle .$$
   (b) Calculer ce polynôme Q_φ.