EXAMEN – MATH4A

Durée 2h00. Tout document interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1 (4pts). On fixe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

a) Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions bornées qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$. Montrer que f est aussi bornée.

b) Soit $f_n : I \to \mathbb{C}$ une suite de fonctions qui converge uniformément sur I vers une fonction $f : I \to \mathbb{C}$ bornée. Est-ce que les fonctions f_n sont aussi nécessairement bornées ?

c) Soit $f : I \to \mathbb{C}$ une fonction quelconque. Trouver une suite de fonctions $f_n : I \to \mathbb{C}$ bornées qui converge simplement vers f.

Exercice 2 (3pts). Soit $\beta > 0$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \begin{cases} n^\beta x & \text{si } x \in [0, 1/n[, \\ 0 & \text{si } x \in [1/n, 1]. \end{cases}$$

a) Déterminer la limite simple de la suite f_n.

b) Déterminer les paramètres $\beta > 0$ pour lesquels la suite f_n converge uniformément.

Exercice 3 (3pts). Soit $\beta > 0$ et $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ la suite de fonction définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{n^\beta} \ln(1 + e^{n^2(1-x)}).$$

a) Déterminer les paramètres $\beta > 0$ pour lesquels la suite f_n converge simplement sur $[0,1]$, et lorsque c'est le cas, déterminer la limite simple.

b) Déterminer les paramètres $\beta > 0$ pour lesquels la suite f_n converge uniformément.

Exercice 4 (2pts). Soit $\beta \in \mathbb{R}$ et considérons la suite de fonctions $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f_n(x) = \frac{1}{(n+1)^\beta} \sqrt{n \cos^2 x + 4}.$$

On s'intéresse à la série de fonctions $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

a) Déterminer l'ensemble des paramètres β pour lesquels $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge simplement sur $\mathbb{R}$.

b) Déterminer l'ensemble des paramètres β pour lesquels $\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n$ converge normalement sur $\mathbb{R}$.

Exercice 5 (3pts). Soit $I =]1, +\infty[$. Pour $x \in I$, on pose

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{1 + x^n}.$$

a) Vérifier que f est définie sur I.

b) Montrer que f est continue sur I.

c) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I.

Exercice 6 (5pts). Soit $a = (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+^*$ une suite et on considère l'espace

$$X_a = \left\{ x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R} : \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |x_n| < +\infty \right\}.$$

Pour $x \in X_a$, on pose $\|x\|_a = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n |x_n|$.

a) Montrer que si $x, y \in X_a$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $x + \lambda y \in X_a$.

b) Montrer que $\|\cdot\|_a$ est une norme sur X_a.

c) On suppose qu'il existe $m, M > 0$ tels que $m \leq a_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que si la suite $b = (b_n)$ satisfait les mêmes inégalités, alors $X_a = X_b$ et les normes $\|\cdot\|_a$ et $\|\cdot\|_b$ sont équivalentes.

d) Exhiber deux suites a, b telles que X_a et X_b sont différents.