RATTRAPAGE – MATH4A

Durée 2h00. Tout document interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1 (3pts). On fixe un intervalle $I = [a, b[$ et une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ continue et positive. Soit $(x_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset I$ une suite croissante telle que $\lim_{k\to\infty} x_k = b$. On pose $u_k = \int_{x_k}^{x_{k+1}} f(t)\, dt$.

Montrer que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\, dt$ est convergente si et seulement si la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} u_k$ converge.

Exercice 2 (3pts). On fixe un intervalle $I = [a, b]$ et une suite de fonctions continues $f_n : I \to \mathbb{R}$. On suppose que la suite f_n converge simplement sur I vers une fonction continue f. Est-ce que la suite f_n converge uniformément sur I vers f ? Si oui, le montrer, sinon donner un contre-exemple.

Exercice 3 (3pts). Déterminer l'ensemble des paramètres $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$ tels que l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_2^\infty \frac{e^{\gamma x}}{x^\alpha \ln x}\, dx$$

Exercice 4 (4pts). Déterminer si l'intégrale suivante est convergente :

$$\int_0^\infty \frac{\sinh(x)\, \sin^2(\sqrt{x})}{(e^{2x} - 1)\, \ln(1 + e^{x^3})} dx.$$

Exercice 5 (2pts). Déterminer l'ensemble des valeurs $a > 0$ telles que la suite de fonctions $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx}$ converge uniformément sur $[0, a]$.

Exercice 6 (3pts). Pour tout $n \geq 1$ et $x \in \mathbb{R}_+$, soit

$$f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n(1 + x)}\right).$$

Montrer que la série converge uniformément sur $\mathbb{R}_+$. La convergence est-elle normale sur $\mathbb{R}_+$?

Exercice 7 (2pts). Déterminer l'ensemble des valeurs $a \geq 0$ telles que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{-nx^2}}{1 + n}$ converge uniformément sur $[a, +\infty[$.

Exercice 8 (2pts). Soit $N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ la fonction définie par $N(x) = |x|^{1/3}$. Est-ce que N définit une norme sur $\mathbb{R}$?