Université de Bourgogne Année 2021-2022
Structures fondamentales 14 décembre

Contrôle terminal – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifiez vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Rappel : 1) Le groupe S_3 est l'ensemble des bijections de l'ensemble $[\![1;3]\!]$ muni de la loi de composition $\circ$, c-à-d si f et g sont deux bijections de $[\![1;3]\!]$ alors $f \circ g$ est la composition de g par f qui est encore un élément de S_3. Ce groupe contient 6 éléments. En utilisant la notation du cours, on les numérote comme suit :

$$f_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix},\ f_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \end{pmatrix},\ f_3 = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \end{pmatrix},\ f_4 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \end{pmatrix},\ f_5 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } f_6 = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2) Le groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est l'ensemble $[\![0;5]\!]$ équipé de la loi $+$ définie par : si $a, b \in [\![0;5]\!]$ alors $a+b$ dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est le reste de la division euclidienne de $a+b$ dans $\mathbb{Z}$ par 6.

Exercice 1.

1) a) Donner deux éléments f et g de S_3 tels que $f \circ g \neq g \circ f$.
b) Pour chaque $i \in [\![1;6]\!]$, donner l'ordre de f_i dans S_3 (en justifiant).
c) Donner une liste de tous les sous-groupes de S_3.
2) a) Pour chaque $x \in [\![0;5]\!]$, donner l'ordre de x dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ (en justifiant).
b) Donner une liste de tous les sous-groupes de $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

Pour toute la suite, G et G' sont deux groupes dont les lois sont notées multiplicativement et dont les éléments neutres sont notés respectivement e et e'.

Exercice 2.

Soit $k, n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que k et n sont premiers entre eux. Soit $a \in G$ un élément d'ordre n et soit $b \in G$ un élément d'ordre k.
1) Montrer que si $p \in \mathbb{N}^*$ est tel que $a^p = e$ alors n divise p.
2) Quel est l'ordre de a^k ?
3) On suppose pour cette question que G est abélien. Montrer que l'ordre de ab est nk.
4) En prenant $k = 2$ et $n = 3$, donner un exemple de groupe G non abélien ayant deux éléments a, b d'ordre respectivement 3 et 2 où l'ordre de ab n'est pas 6.

Exercice 3.

On suppose que G est fini et d'ordre impaire.
1) Montrer que si $x \in G$ vérifie $x^2 = e$ alors $x = e$.
2) Montrer que pour tout $x \in G$ il existe $y \in G$ tel que $y^2 = x$.

Exercice 4.

Soit H un sous-groupe de G. Soit H' un sous-groupe de G'. Soit $f \colon G \to G'$ un morphisme de groupes.
1) Montrer, en partant de la définition d'un morphisme de groupes, que $f(e) = e'$.
2) A-t-on forcément que $f(H)$ est un sous-groupe de G' ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.
3) A-t-on forcément que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 5.

Soit H un sous-groupe de G. Pour chaque $g \in G$, on note $gH := \{gx \,|\, x \in H\}$ et $Hg := \{xg \,|\, x \in H\}$.
1) Soit $x, y \in G$ tels que $Hx \cap Hy \neq \varnothing$. Montrer que $Hx = Hy$.
2) Donner un exemple de groupe G, de sous-groupe $H \subset G$ et d'élément $g \in G$ tels que $gH \neq Hg$.