MATH3E
Université de Bourgogne | Année 2021-2022
Structures fondamentales | 9 juin

Rattrapage – 2h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.
Justifiez vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, G est un groupe dont la loi est notée multiplicativement et dont l'élément neutre est noté e.

Exercice 1.
Soit G' un deuxième groupe dont on note e' l'élément neutre. Soit $f\colon G \to G'$ un morphisme de groupes.
1) Montrer, en partant de la définition d'un morphisme de groupes, que $f(e) = e'$.
2) Soit H un sous-groupe de G. Soit H' un sous-groupe de G'.
a) A-t-on forcément que $f(H)$ est un sous-groupe de G' ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.
b) A-t-on forcément que $f^{-1}(H')$ est un sous-groupe de G ? Si oui le montrer. Si non, donner un contre-exemple.

Exercice 2.
a) Soit $a \in G$. On définit l'ensemble C_a par $C_a := \{x \in G \,|\, ax = xa\}$. Montrer que C_a est un sous-groupe de G.
b) L'ensemble $Z := \{x \in G \,|\, \forall y \in G \;\; yx = xy\}$ est-il un sous-groupe de G ?

Exercice 3.
Soit H un sous-groupe de G. Rappelons que si $a \in G$ alors $aH := \{ah \,|\, h \in H\}$. Soit x et y deux éléments de G.
1) Montrer que $xH = yH$ si et seulement si $x^{-1}y$ appartient à H.
2) Montrer que si $xH \cap yH \neq \varnothing$ alors $xH = yH$.

Exercice 4.
On suppose que G est fini et d'ordre 20.
1) Montrer que e est l'unique solution dans G à l'équation $x^3 = e$.
2) Soit $y \in G$. Montrer qu'il existe $z \in G$ tel que $z^3 = y$.
3) Montrer que l'application $f\colon G \to G$, qui à $x \in G$ associe x^3, est injective.

Exercice 5.
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Soit a un élément d'ordre k de G. Combien y a-t-il d'éléments dans l'ensemble

$$A := \{a^n \,|\, n \in [\![0; 2k]\!]\} \text{ ?}$$

Justifiez votre réponse.