Math3C

L2 : Probabilités **Date** : Jeudi 16 décembre 2021 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités

Exercice 1 (Pari d'amie ?) **:** *Une amie vous propose le pari suivant : elle lance une pièce de monaie équilibrée, de manière indépendante, jusqu'à obtenir pour la première fois la séquence FF ou PF. On note P pour pile et F pour face. Si FF sort en premier vous gagnez 12€, si PF sort en premier vous perdez 8€.* On considère $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variable aléatoires indépendantes et identiquement distribuée telles que $\mathbb{P}(X_n = P) = \mathbb{P}(X_n = F) = 1/2$, de sorte que X_n représente le résultat du $n$ème lancé s'il a lieu. On pose ensuite

$$T_1 = \inf\{k \geq 2 : X_{k-1} = F, X_k = F\} \quad \text{et} \quad T_2 = \inf\{k \geq 2 : X_{k-1} = P, X_k = F\}, \qquad (0.1)$$

et on note $G = \{T_1 < T_2\}$ l'événement pour lequel la variable aléatoire T_1 est inférieure à T_2.

▷ **1)** On suppose ici que les 5 premiers lancés sont $FPPFF$. Que vaut T_1 et T_2 ?

▷ **2)** Que représente l'événement G ?

▷ **3)** Calculer les probabilités $\mathbb{P}(X_1 = P)$, $\mathbb{P}(X_1 = F, X_2 = F)$ et $\mathbb{P}(X_1 = F, X_2 = P)$.

▷ **4)** Donner, sans caluls mais en justifiant, les probabilités conditionnelles $\mathbb{P}(G|X_1 = P)$, $\mathbb{P}(G|X_1 = F, X_2 = F)$ et $\mathbb{P}(G|X_1 = F, X_2 = P)$.

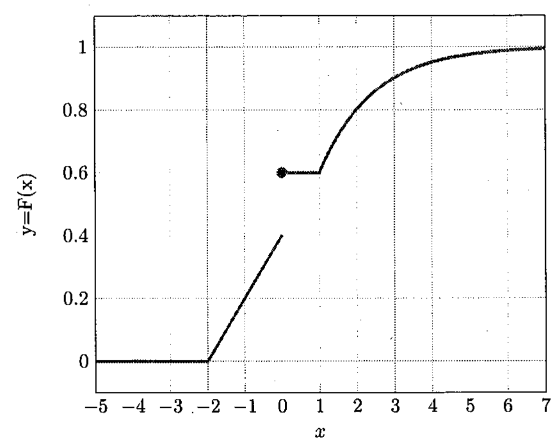
▷ **5)** En déduire que $\mathbb{P}(G) = 1/4$.

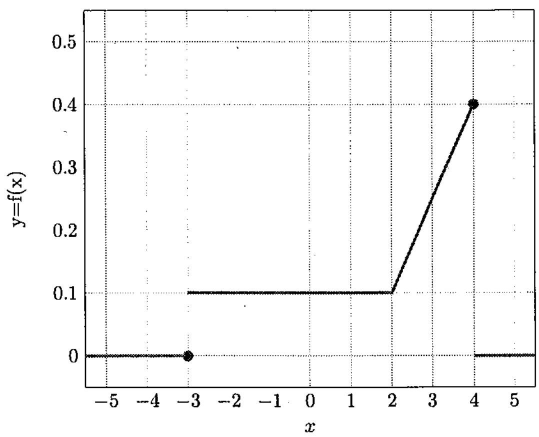
▷ **6)** On note S la variable aléatoire représentant votre gain relatif en euros, i.e. $S = 12$ lorsque vous gagnez et $S = -8$ lorsque vous perdez.

(a) Déterminer la loi de S.

(b) Calculer $\mathbb{E}[S]$ et $\mathbb{V}(S)$. Avez-vous intérêt à jouer avec votre amie ?

Exercice 2 : Les figures représentent le graphe de la fonction de répartion F d'une variable aléatoire X (à gauche) et le graphe de la densité f d'une variable aléatoire Y (à droite).





Déterminer **i)** $\mathbb{P}(X = 0)$ **ii)** $\mathbb{P}(X \geq 0)$ **iii)** $\mathbb{P}(-1 < X \leq 2)$ **iv)** $\mathbb{P}(-1 < Y < 2)$ **v)** $\mathbb{P}(Y \geq 0)$.

Exercice 3 (Casino Royale) : *Vous jouez à la roulette en pariant exclusivement sur une couleur, de telle sorte que avez une chance sur deux de gagner à chaque partie. Lorsque vous gagnez vous remportez deux fois votre mise. Vous décidez de vous arrêter dès que vous gagnez votre première partie et vous doublez votre mise après chaque partie perdue. Vous misez 100€ à la première partie. On suppose bien entendu que toutes les parties sont indépendantes.* On note T le nombre de parties jouées avant de gagner pour la première fois et S votre gain relatif. Par exemple, si vous perdez la première partie et gagnez la seconde, $T = 2$ et $S = 2 \times 200 - (100 + 200)$: vous remportez 2 fois 200€ et avez misé 100€ à la première partie plus 200€ à la seconde.

▷ **1)** Quelle est la loi (classique) de T ? Donner son espérance.

▷ **2)** On note m_n la somme misée à la $n$ème partie. Exprimer m_n en fonction de n. On rappelle la formule $(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1}) = 1-x^n$.

▷ **3)** Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, si $T = n$ alors $S = 100$. En déduire que $\mathbb{P}(S = 100) = 1$. *Cette statégie vous permet donc de faire à coup sûr un bénéfice de 100€ au casino, ce qui est assez incroyable vous en conviendrez.*

▷ **4)** Soit M la somme que vous avez dû avancer avant de gagner la première fois. Par exemple $M = 300$ si vous gagnez à la seconde partie.

(a) Justifier que $M = 2^T - 1$.

(b) Montrer que $\mathbb{E}[M] = +\infty$. Conclure sur la pertinence de cette startégie.

Exercice 4 (Attraper les tous !) : *Dans chaque paquet de Corn Flakes se trouve une figurine de pokemon parmi Pikachu, Dracaufeu, Mewtwo, Lucario et Evoli, la probabilité qu'un paquet donné contienne un pokemon en particulier étant* $1/5$, *indépendamment de tous les autres paquets. Vous avec déjà Lucario et Evoli et vous achetez 6 paquets de Corn Flakes.* Montrer que la probabilité de compléter votre collection est

$$p = 1 - 3\left(\frac{4}{5}\right)^6 + 3\left(\frac{3}{5}\right)^6 - \left(\frac{2}{5}\right)^6.$$

Exercice 5 : Vous lancez un dé à six faces équilibré indéfiniment et de manière indépendante. On note $(X_k)_{k\geq 1}$ la suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées représentant les résultats. On considère $Y_k = \mathbb{1}_{\{X_k=6\}}$ la variable aléatoire valant 1 si le $k$ème lancer est un 6 et 0 sinon. Cette suite est également indépendante et identiquement distribuée. Quelque soit $n \in \mathbb{N}^*$ On pose $S_n = \sum_{k=1}^n Y_k$.

▷ **1)** Que représente S_n ? Donner sa loi, son espérance et sa variance (sans refaire les calculs).

▷ **2)** Montrer que les variables aléatoires S_n et Y_{n+1} sont indépendantes.

▷ **3)** Soit E_n l'événement « lors des n premiers lancers vous avez fait un nombre pair de 6 ». On note $p_n = \mathbb{P}(E_n)$ et $2\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers pairs. On remarquera que $E_n = \{S_n \in 2\mathbb{N}\}$.

(a) On a $p_1 = 1$. Calculer p_2 et p_3.

(b) Démontrer que $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n) = \frac{5}{6}$ et $\mathbb{P}(E_{n+1}|E_n^c) = \frac{1}{6}$ et en déduire que $p_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + \frac{1}{6}$.

(c) Montrer que $u_n = p_n - \frac{1}{2}$ est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ et en déduire p_n.