L2 : Probabilités **Date** : Jeudi 9 juin 2022 **Durée** : 2h

Examen de Probabilités : 2ème session

Exercice 1 :

▷ **1)** Soit A, B, C trois événements d'un univers Ω. Exprimer en fonction de A, B, C et des opérations ensemblistes les événements suivants : **i)** A seul se produit **ii)** Les 3 événements se produisent **iii)** Deux au moins des événements se produisent.

▷ **2)** Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une suite d'événements d'un univers Ω. Exprimer par des opérations ensemblistes l'événements suivants : une infinité d'événements A_n, $n \geq 1$, se produisent.

Exercice 2 : Soit $\mathbb{P}$ une probabilité discrète sur $\{1, \cdots, n\}$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ tel que pour tout $1 \leq k \leq n$ on ait $\mathbb{P}(\{1, \cdots, k\}) = \alpha k$. Déterminer α et $\mathbb{P}(\{k\})$ pour tout $1 \leq k \leq n$.

Exercice 3 : Une compagnie d'assurance a répartit ses assurés en trois catégories : conducteurs à faible risque, risque moyen, haut risque. Une étude a montré que pour ces catégories les probabilités de sinistre sur une période d'un an sont respectivement s_1, s_2 et s_3. On note p_1, p_2 et p_3 les proportions de conducteurs à faible risque, à risque moyen et à haut risque. On choisit au hasard un assuré de la compagnie.

▷ **1)** Sachant qu'il a eu un accident dans l'année, exprimer la probabilité pour qu'il s'agisse d'un conducteur à haut risque en fonction des paramètres de l'énoncé. Justifier.

▷ **2)** Sachant qu'il n'a pas eu d'accident dans l'année, exprimer la probabilité pour qu'il s'agisse d'un conducteur à faible risque en fonction des paramètres de l'énoncé. Justifier.

Exercice 4 : Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}^*$.

▷ **1)** Montrer que si X est de loi géométrique de paramètre p alors

$$\forall n, m > 0, \quad \mathbb{P}(X > n + m | X > m) = \mathbb{P}(X > n) \quad (\#)$$

▷ **2)** Réciproquement, montrer si X vérifie $(\#)$ alors X est de loi géométrique.

Exercice 5 : Soit X_1 et X_2 deux variables aléatoire indépendantes de loi géométrique de paramètres p_1 et p_2 et Y_1 et Y_2 deux variables aléatoire indépendantes de loi de Poisson de paramètres λ_1 et λ_2.

▷ **1)** Calculer $\mathbb{P}(\min(X_1, X_2) > n)$, $n \in \mathbb{N}$.

▷ **2)** En déduire la loi de $\min(X_1, X_2)$.

▷ **3)** Déterminer la loi de $Y_1 + Y_2$.

Exercice 6 : Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition $F(x) = 0$ si $x < -1$, $F(x) = 1/2$ si $-1 \leq x < 0$ et $F(x) = 2/3$ si $0 \leq x < 1$ et $F(x) = 1$ si $x \geq 1$.

▷ **1)** Déterminer la loi de X.

▷ **2)** Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

▷ **3)** Déterminer la loi de X^2.

Exercice 7 : Soit $(X_k)_{k\geq 1}$ une suite i.i.d. de variables aléatoires de loi de Bernoulli de paramètre p et N une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre λ, indépendante de $(X_k)_{k\geq 1}$. On pose $S = 0$ si $N = 0$ et $S = \sum_{k=1}^{N} X_k$ sinon.

▷ **1)** Soit $1 \leq k \leq n$. Que vaut $\mathbb{P}(S = k|N = n)$?

▷ **2)** Déterminer la loi de S.

Exercice 8 : Soit f une densité de probabilité de la forme $f(x) = \alpha|x|^\beta$ si $-1 \leq x \leq 1$ et $f(x) = 0$ sinon, avec $\alpha > 0$ et $\beta \geq 0$.

▷ **1)** Exprimer α en fonction de β.

▷ **2)** Calculer et tracer la fonction de répartition associée.