Université de Bourgogne Année universitaire 2021-2022

Licence de Mathématiques Math3B

L2

Examen

Décembre 2021. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. (Questions de cours) *(4 points)*

1. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et G une famille génératrice de E, finie de cardinal $m \in \mathbb{N}^*$. Alors pour toute famille libre L de E, $card(L) \leq m$.

2. Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, f un endomorphisme de E et λ une valeur propre de f. Montrer que la dimension du sous-espace propre E_λ n'excède pas la multiplicité de λ.

Exercice 2. (Maîtrise des concepts) *(4 points)* Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Soit $(v_1, \cdots, v_n)$ une famille de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, alors $\det\Big(v_1, \cdots, v_n - \sum_{k=1}^{n-1} kv_k\Big) = -\sum_{k=1}^{n-1} k \det\Big(v_1, \cdots, v_n - v_k\Big)$.
2. Si A^2 est diagonalisable dans $\mathbb{R}$, alors A est diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
3. Si D est une matrice diagonale d'ordre n à coéfficients dans $\mathbb{R}$, donnée par $D = diag(\lambda_1, \cdots, \lambda_n)$, alors pour tout $t \in \mathbb{R}$,
$$e^{tD} = diag(e^{t\lambda_1}, \cdots, e^{t\lambda_n}).$$
4. Si la matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est telle que $(A - I)^7 = 0$, avec I la matrice identité d'ordre n, alors son polynôme minimal $\mu_A(X)$ divise $(X-1)^7$ et son polynôme caractéristique est $P_A(X) = (1 - X)^n$.

Exercice 3. *(Exercice du TD) (4 points)* Soit A la matrice d'ordre 3 suivante

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le polynôme caractéristique et montrer que A n'a qu'une seule valeur propre 1.
2. En déduire que A n'est pas diagonalisable.
3. Montrer que si $A = D + N$ est la décomposition de Dunford de A alors $D = I$ et $N = A - I$.
4. Soit $n \in$. Calculer A^n.

Exercice 4. *(Diagonalisation et décomposition de Dunford) (8 points)* Soient $\alpha \in \mathbb{R}$ et A_α la matrice suivante

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} -1 & 0 & \alpha+1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 1 & \alpha \end{pmatrix}.$$

1. Calcul du polynôme minimal de A_α suivant les valeurs de α.
   (a) Factoriser le polynôme caractéristique $P_{A_\alpha}(X)$ en produit de facteurs du premier degré.
   (b) Déterminer selon la valeur du paramètre α les valeurs propres distinctes de A_α et leur multiplicité.
   (c) Déterminer les valeurs de α pour lesquelles la matrice A_α est diagonalisable. (Indication : discuter deux cas : $\alpha = 0$ et $\alpha \neq 0$ et dans ce dernier en discuter deux : $\alpha = -1$ et $\alpha \neq -1$).
   (d) Déterminer selon la valeur de α le polynôme minimal de A_α.
2. Décomposition de Dunford : on suppose désormais que $\alpha = 0$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ associé à la matrice $A := A_0$.
   (a) Déterminer les sous-espaces propres et caractéristiques de A.
   (b) Démontrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f est
   $$B := \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$
   et trouver une matrice P inversible telle que $A = PBP^{-1}$.
   (c) Ecrire la décomposition de Dunford de B (justifier).
   (d) Pour $t \in \mathbb{R}$, calculer e^{tB} et exprimer e^{tA} à l'aide de P et e^{tB}.
   (e) Donner les solutions des systèmes différentiels suivants :
   $$(S_1) \quad Y' = BY \quad \text{et} \quad (S_2) \quad X' = AX.$$