Université de Bourgogne | Année universitaire 2021-2022

Licence de Mathématiques Math3B

Examen

Juin 2022. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. *(5 points)* Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie.

1. *(3 points)* Soit f un endomorphisme diagonalisable de E.
   (a) Montrer que
   $$E = \mathrm{Ker}f \oplus \mathrm{Im}f.$$
   Indication : Considérer l'ensemble I des indices des valeurs propres nulles de f et son complémentaire.
   (b) Que pensez-vous de la réciproque ?
2. *(2 points)* Soit p un endomorphisme de E.
   (a) Montrer que si p est un projecteur alors $E = Ker(p) \oplus Im(p)$.
   (b) En déduire que p est un projecteur sur $Im(p)$ parallèlement à $Ker(p)$.

Exercice 2. (Maîtrise des concepts) *(4 points)* Que pensez-vous des affirmations suivantes ? Toute réponse non justifiée ne sera pas prise en compte.

1. Si A est une matrice réelle de taille $n \times m$, alors les matrices AA^T et A^TA sont semi-définies positives.
2. La somme de deux matrices diagonalisables est diagonalisable.
3. Un endomorphisme nilpotent d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie est toujours diagonalisable ? trigonalisable ?
4. Soit M une matrice triangulaire. Alors M est nilpotente si et seulement si ses éléments diagonaux sont tous nuls.

Exercice 3. *(Exercice du TD) (4 points)* Soit φ l'application de $\mathbb{R}_4[X]$ dans $\mathbb{R}_4[X]$ qui à un polynôme P associe le polynôme $\varphi(P)$ défini par
$$\varphi(P)(X) = P(X+1).$$
On munit $\mathbb{R}_4[X]$ de sa base canonique $\beta := (1, X, X^2, X^3, X^4)$.

1. Montrer que φ est une application linéaire.
2. Donner la matrice A de φ dans la base β. A quoi cela vous fait-il penser ?
3. Montrer que φ est bijective et donner son application réciproque.
4. Donner la matrice B de φ^{-1} toujours dans la base β.
5. En déduire la matrice inverse de A.

Exercice 4. *(Décomposition de Dunford) (7 points)* Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à 3 à coefficients réels et f l'application définie sur E par
$$\forall P \in E, \quad f(P) = P' + P'' + XP(0).$$
Soit $\beta := (1, X, X^2, X^3)$ la base canonique de E.

1. Montrer que f est un endomorphisme de E.
2. Déterminer la matrice A de f relativement à la base β. Calculer son polynôme caractéristique P_A. En déduire que le spectre de A est égal à l'ensemble $\{-1, 0, 1\}$.
3. Déterminer le rang de f, son image $Im(f)$ et son noyau $Ker(f)$.
4. f est-il diagonalisable ? En déduire son polynôme minimal μ_f.
5. L'endomorphisme $f^3 := f \circ f \circ f$ est-il diagonalisable ? Si oui, déterminer une base dans laquelle la matrice A^3 de f^3 est diagonale.
6. Déterminer les projecteurs spectraux π_0, π_1 et π_{-1} de l'endomorphisme f.
7. En déduire la décomposition de Dunford de f.

   Soit d et n la décomposition de Dunford de f de matrices respectives A_d et A_n dans la base β.
8. Calculer e^{tA_d} et e^{tA_n}. En déduire la solution du système différentiel
   $$X' = AX, \quad X(0) = C$$
   où C est un vecteur donné dans $\mathbb{R}^4$.