Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une application.

1. *Donner la définition de « f est continue sur I » puis de « f est uniformément continue sur I ».*
2. *Soit $I = [0,1]$. Montrer que, si f est continue sur I alors f est uniformément continue sur I.*
3. *En déduire que, si f est continue sur $[0,1]$ alors f est intégrable sur $[0,1]$.*
4. Donner un exemple de f intégrable sur $[0,1]$, non continue sur $[0,1]$.
5. Soit $I = [0,+\infty[$ et $f(x) = x^2$, $\forall x \in I$. Montrer que, pour tout $\delta > 0$, il existe $x \in I$ tel que $(x+\delta)^2 - x^2 > 1$. En déduire que f est continue mais pas uniformément continue sur I.

Les questions en italique sont des questions de cours.

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, pour $a \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $\sum \frac{(2n)!}{3^n\sqrt{(4n)!}} z^n$,   b) $\sum (-1)^n \pi^{n+1} z^{2n+2}$,

c) $\sum \frac{1}{n(n+1)} z^n$.   d) $\sum n^{n^a} z^n$.

Calculer la somme de la série c), pour $n \geq 1$, en tout point z où elle converge.

Exercice 3. Soit f développable en série entière autour de 0, solution de l'équation différentielle :

$$(x^2-1)f''(x) + 6xf'(x) - 4f(x) = -4, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = 0.$$

Soit $\sum a_n x^n$ le développement en série entière de f autour de 0 et R son rayon.

1. Montrer que $a_{2k+1} = 0$, pour tout $k \in \mathbb{N}$. Trouver une relation de récurrence sur les (a_{2k}).
2. Soit $h(x) = 1/(1-x)$. Développer en série entière autour de l'origine $h'(x)$ puis $h'(x^2)$.
3. En déduire le développement en série entière autour de 0 la fonction g :
$$g(x) = 2x^2 \frac{2-x^2}{(1-x^2)^2}.$$
4. Comparer le développement de f à celui de g et en déduire que $R = 1$.

Exercice 4. Dire si les affirmations suivantes sont vraies – auquel cas on les justifiera brièvement – ou fausses – auquel cas, on fournira un contre-exemple.

1. Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont rayon de convergence 1, alors $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) \neq 0$.
2. Si $\sum a_n z^n$ a rayon de convergence R, alors $\sum (-1)^n n a_n z^n$ aussi.
3. Les deux limites sont égales :
$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{2kn}{k^2+n^2}, \qquad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2k+n}.$$
4. Pour f continue sur $I = [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$, on note $u_n = \int_0^1 x^n f(x)dx$. Alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.