Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit (u_n) et (v_n) suites réelles, (u_n) croissante et $u_n \leq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Soit $a \in \mathbb{R}$. Montrer que (v_n) tend vers a ssi (v_{2n}) et (v_{2n+1}) tendent vers a.
2. Posons, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P_n = \sum_{k=0}^{2n}(-1)^k u_k$ et $I_n = \sum_{k=0}^{2n+1}(-1)^k u_k$. Montrer que (P_n) et (I_n) sont monotones puis que $P_n \leq I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Supposons $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$. Montrer que (P_n) et (I_n) sont adjacentes puis que $\sum(-1)^n u_n$ converge.
4. Dire si la série suivante est absolument convergente. Si elle converge, en calculer la somme :
$$\sum_{n\geq 2}(-1)^n \ln\left(\frac{n+1}{n-1}\right).$$

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, pour $a, b \in \mathbb{R}_+^*$.

a) $\sum \frac{(2n)!}{3^n\sqrt{(4n)!}} z^{2n}$,

b) $\sum(-1)^n \frac{1+a^{2n}}{2+b^n} z^n$,

c) $\sum \frac{1}{n(n+1)(n+2)} z^n$.

d) $\sum(1+(-1)^{n^2}) z^n$,

Calculer la somme de la série c), pour $n \geq 1$,

Exercice 3. Dire si les affirmations suivantes sont vraies (dans ce cas, le justifier brièvement) ou fausses (dans ce cas, fournir un contre-exemple).

1. Si $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont rayon de convergence 1 et $b_n \neq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, alors $\lim_{n\to\infty}(a_n/b_n) \neq 0$.
2. Soit f croissante et g décroissante sur $[0,1]$. Alors fg est intégrable sur $[0,1]$.
3. Si $\sum a_n z^n$ a rayon de convergence R, alors $\sum(-1)^n n a_n z^{n-1}$ aussi.
4. Si $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ prend seulement un nombre fini de valeurs, alors f est intégrable.
5. Supposons qu'une suite croissante (u_n) admet une suite extraite majorée. Alors (u_n) converge.
6. Soit $a > 0$ et $\limsup_{n\to\infty} u_n = a$, $\liminf_{n\to\infty} u_n = -a$. Alors $\lim_{n\to\infty}(u_n)^2 = a^2$.

Exercice 4. Soit $a \in \{0,1\}$ et considérons f_a développable en série entière sur un intervalle I, solution de :
$$x^2 f_a''(x) + x f_a'(x) + (x^2 - a) f_a(x) = 0, \qquad \text{pour tout } x \in I \text{ et } f_a^{(a)}(0) = 1.$$

1. Écrivons $f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ le développement de f. Montrer que $a_n = 0$ pour n impair puis :
$$a_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{2k}(k!)^2}, \qquad \text{pour tout } k \in \mathbb{N}.$$
2. Soit $f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. Montrer $b_n = 0$ pour n pair puis calculer b_{2k+1}, pour $k \in \mathbb{N}$.
3. Calculer le rayon de convergence de $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$.
4. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $2f_0'(x) = -f_1(x)$ et $(x f_1(x))' = 2x f_0(x)$.