Examen - UE Math2C - Compléments mathématiques - Durée 2h.

Exercice 1.

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle :
$$(E_1^0) \qquad 3z'' - 8z' - 3z = 0 \qquad (\text{où } z \text{ est une fonction de la variable } x \in \mathbb{R}).$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle :
$$(E_1) \qquad 3y'' - 8y' - 3y = 32x\,\mathrm{e}^{x} \qquad (\text{où } y \text{ est une fonction de la variable } x \in \mathbb{R}).$$
3. Déterminer la solution de (E_1) satisfaisant les conditions initiales $y(0) = 0$ et $y'(0) = \frac{2}{3}$.

Exercice 2.

1. Donner la forme générale des solutions de l'équation différentielle :
$$(E_2^0) \qquad z'' + 9z = 0 \qquad (\text{où } z \text{ est une fonction de la variable } x \in \mathbb{R}).$$
2. En déduire les solutions de l'équation différentielle :
$$(E_2) \qquad y'' + 9y = 18\cos 3x \qquad (\text{où } y \text{ est une fonction de la variable } x \in \mathbb{R}).$$
3. Déterminer la solution de E_2 satisfaisant les conditions initiales $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{2}$ et $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Exercice 3. Rappel : si E est un ensemble et A un sous-ensemble de E, on note $\mathbb{1}_A$ la fonction de E dans $\{0;1\}$ définie par : $\forall x \in E \quad (\mathbb{1}_A(x) = 1) \iff (x \in A)$.

1. Soient A_1, A_2 et A_3 trois sous-ensembles d'un ensemble E et $x \in E$.
   (a) Exprimer $\mathbb{1}_{A_1 \cap A_2}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_{A_1}(x)$ et $\mathbb{1}_{A_2}(x)$;
   (b) Exprimer $\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_{A_1}(x)$ et $\mathbb{1}_{A_2}(x)$;
   (c) Exprimer $\mathbb{1}_{A_1 \triangle A_2}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_{A_1}(x)$ et $\mathbb{1}_{A_2}(x)$;
   (d) Exprimer $\mathbb{1}_{A_1 \cup A_2 \cup A_3}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_{A_1}(x)$, $\mathbb{1}_{A_2}(x)$ et $\mathbb{1}_{A_3}(x)$.
2. Soit $f : X \to Y$ une application.
   (a) Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ pour $B \subset Y$.
   (b) Montrer que pour tout $B \subset Y$ et tout $x \in X$ on a $\mathbb{1}_B\big(f(x)\big) = \mathbb{1}_{f^{-1}(B)}(x)$.
   (c) Soient B_1 et B_2 deux parties de Y. **En utilisant la question 1 et 2.(c)**, retrouver les propriétés :
      i. $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$;
      ii. $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$;
      iii. $f^{-1}(B_1 \triangle B_2) = f^{-1}(B_1) \triangle f^{-1}(B_2)$.
3. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \mathrm{e}^{-|x|}$.
   (a) Représenter graphiquement la fonction f.
   (b) Déterminer les ensembles suivants :
   $$A = f([0,1]) \quad B = f^{-1}\big(f([0,1])\big) \qquad C = f^{-1}([0,1]) \qquad D = f\big(f^{-1}([0,1])\big).$$
   (c) Comparer $f([-1,0] \cap [0,1])$ et $f([-1,0]) \cap f([0,1])$.

Exercice 4. Déterminer les ensembles suivants :
$$E_1 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n+1}, n\right] \quad E_2 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left[-\frac{1}{n+1}, n\right] \quad E_3 = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n+1}, n\right] \quad E_4 = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \left]-\frac{1}{n+1}, n\right]$$