Université de Bourgogne
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

Année 2021-2022
10 mai 2022

Examen
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(1) **(5 points)** (Questions du cours)
  (a) Soit $f : E \to F$ une application linéaire de l'espace vectoriel E à l'espace vectoriel F. Montrer que f est injective si et seulement si le noyau $\ker f$ est égal à $\{0_E\}$.
  (b) Soit $h : E \to E$ un endomorphisme, et soit λ une valeur propre de h. Donner une définition de l'espace propre E_λ, et montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E.
  (c) Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées. Soient $\det(A)$ le déterminant de A, et tr(A) la trace de A. Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.
    (i) $\mathrm{tr(AB)} = \mathrm{tr(A)tr(B)}$.
    (ii) $\mathrm{tr(A+B)} = \mathrm{tr(A)} + \mathrm{tr(B)}$.
    (iii) Si A et B sont semblables, alors $\mathrm{tr(A)} = \mathrm{tr(B)}$ et $\det(A) = \det(B)$. (Rappel : On dit que A et B sont semblables s'il existe une matrice $P \in M_n(\mathbb{R})$ qui est inversible telle que $P^{-1}AP = B$.)
    (iv) Si $A \in M_2(\mathbb{R})$ avec polynôme caractéristique égal à $X^2 - X$, alors A est diagonalisable.

(2) **(5 points)**
  (a) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer si A est inversible, et trouver l'inverse s'il existe.
  (b) Soit $c \in \mathbb{R}$, et soit $B_c = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & c \end{pmatrix}$. Déterminer pour quelles valeurs $c \in \mathbb{R}$ la matrice B_c est inversible.
  (c) Déterminer le rang de B_c pour chaque $c \in \mathbb{R}$.

(3) **(3 points)** Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^2$ définie dans la base canonique par la matrice :

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  (a) Donner une base du noyau et de l'image de f. Montrer qu'ils sont supplémentaires.
  (b) Soit $\mathcal{B}$ une base constituée d'un vecteur de $\ker f$ et d'un vecteur de $Im(f)$. Déterminer la matrice $Mat(f; \mathcal{B})$.

(4) **(4 points)** Soit $\mathcal{C}_3 = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit h l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ définie par rapport à la base canonique par la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Autrement dit, $A = Mat(h; \mathcal{C}_3)$.
  (a) On prend dans $\mathbb{R}^3$ les vecteurs : $f_1 = e_2 - e_3$, $f_2 = e_3 + e_1$, $f_3 = e_1$. Montrer que $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
  (b) Déterminer la matrice $B = Mat(h; \mathcal{B})$.

(5) **(3 points)** Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \subset \mathbb{R}[X]$ l'espace vectoriel des polynômes avec coefficients dans $\mathbb{R}$ et de degré ≤ 3.
  (a) Montrer que $\mathcal{B} = (1, X-1, X^2 - X, X^3 - X^2)$ est une base de E.
  (b) Soit $f : E \to E$ l'application linéaire définie par $f(P) = P + 2P'$. Déterminer la matrice $Mat(f; \mathcal{B})$ de f par rapport à la base $\mathcal{B}$.