Examen : Session 2
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(1) **(5 points)** (Questions du cours) Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
 (a) Soient F_1 et F_2 deux sous-espaces vectoriels de E. Montrer que $F_1 \cup F_2$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si $F_1 \subset F_2$ ou $F_2 \subset F_1$.
 (b) Soit $h : E \to E$ un endomorphisme. Donner les définitions d'une valeur propre et d'un vecteur propre de h.
 (c) Soit $f : E \to F$ une application linéaire de l'espace vectoriel E vers l'espace vectoriel F. Décider, sans justification, si les énoncés suivants sont VRAIS ou FAUX.
  (i) Si $\{v_1, \dots, v_n\}$ est une base de E, alors $\{f(v_1), \dots, f(v_n)\}$ est une base de l'image $Im(f)$.
  (ii) Si f est injective, alors $\dim E \leq \dim F$.
  (iii) Si $\dim E \leq \dim F$, alors f est injective.
  (iv) On suppose que $\dim(E) = 3$. Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ est une base de E, alors $\{v_1 + v_2, v_1 - v_2, v_3 + v_1\}$ est aussi une base de E.

(2) **(4 points)**
 Soit $a \in \mathbb{R}$. On considère le système d'équations linéaires :

$$(S) \begin{cases} 3ax + ay - 2z = -4 \\ ax + ay + 3z = 6 \\ 2x + y + z = 1 \end{cases}$$

 (a) Ecrire (S) sous forme matricielle. On appellera A sa matrice.
 (b) Pour quelles valeurs de a la matrice A est-elle inversible ?
 (c) Calculer le rang de (S) en fonction de a.
 (d) Préciser, en utilisant la méthode du pivot de Gauss, pour quelles valeurs des nombres réels a le système (S) a zéro, une, ou une infinité de solutions. Résoudre le système pour $a = 0$ et pour $a = 3$.

(3) **(4 points)** Déterminer les inverses des matrices suivantes lorsqu'elles existent. Donner aussi les rangs de ces deux matrices.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 5 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(4) **(4 points)** Soient F, G les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$ donnés par $F = Vect(u_1, u_2, u_3)$ et $G = Vect(v_1, v_2, v_3)$, où

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad u_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

.

 (a) Trouver une base de F et une base de G.
 (b) Trouver une base de $F \cap G$.

(5) **(3 points)** Soit $E = \mathbb{R}[X]_{\leq 3} \subset \mathbb{R}[X]$ le sous-ensemble des polynômes de degré ≤ 3.
 (b) Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
 (c) Soit $h : E \to \mathbb{R}^2$ l'application définie par $h(P) = (P(1), P'(1))$, où P' est la dérivée de P. Montrer que h est une application linéaire.
 (d) Donner la matrice $Mat(h; \mathcal{B}, \mathcal{C})$, où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^2$.