
Examen Session 2

durée : 2h

La calculatrice est interdite

Questions de cours

Soit A une partie non vide de \mathbb{R} et $m \in \mathbb{R}$.

1. Donner la définition utilisant les quantificateurs de m est un *minorant* de A .
2. Donner la définition utilisant les quantificateurs de m est le *plus petit élément* de A .
3. Sans les quantificateurs, donner la définition de m est la *borne inférieure* de A .
4. Soit m un minorant de A . Ecrire, en utilisant les quantificateurs, la caractérisation de m est la *borne inférieure* de A .
5. Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice 1 Soit (u_n) la suite définie par $u_{n+2} = u_{n+1} + 2u_n$ et $u_0 = u_1 = 1$.

1. Donner l'expression de u_n en fonction de n .
2. Calculer $\sum_{k=0}^n u_k$ en fonction de n .

Exercice 2 Soit la fonction $f(x) = \frac{x}{1 + |x|}$.

1. Donner l'expression de $f(x)$ pour $x \geq 0$ et pour $x \leq 0$.
2. Démontrer que f définit une bijection de \mathbb{R} sur \mathbb{R} .
3. Soit $y \geq 0$ fixé. Donner la solution de l'équation d'inconnue $x : f(x) = y$.
4. Faire de même pour $y \leq 0$.
5. En déduire l'expression de la réciproque de f .

Exercice 3

Donner un équivalent des suites (u_n) et (v_n) suivantes et en déduire leur limite.

1. $u_n = n^2 \sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $v_n = \sqrt{n}\left(1 - \cos\left(\frac{1}{n}\right)\right)$

Exercice 4

Ecrire la formule de Taylor Lagrange à l'ordre 6 en 0 pour $\sin x$ (reste de degré 7).