Math 1B (L1)

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2021-2022
Janvier 2022

Logique et Algèbre 1
Contrôle terminal

Question de cours 1. Soit

$$(E) \quad aZ^2 + bZ + c = 0$$

une équation polynomiale complexe du second degré, où $a \neq 0$, et Δ son discriminant. On suppose que $\Delta \neq 0$ et on note δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ. Montrer que (E) a deux solutions,

$$z_1 = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z_2 = \frac{-b-\delta}{2a}\,.$$

Question de cours 2. Soit n un entier ≥ 2. Soit $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul écrit sous forme exponentielle. Montrer que z a n racines n-ièmes distinctes, $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, où

$$\omega_k = \rho^{1/n}\, e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Exercice 1.

(1) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad Z^2 + 5iZ - 8 + 6i = 0\,.$$

(2) On considère l'équation suivante :

$$(\tilde{E}) \quad Z^3 + (1+5i)Z^2 + (-8+11i)Z - 8 + 6i = 0\,.$$

Montrer que $z \in \mathbb{C}$ est solution de $(\tilde{E})$ si et seulement si $z = -1$ ou z est solution de (E). En déduire l'ensemble des solutions de $(\tilde{E})$.

Exercice 2. Soit $\omega = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}$.

(1) Écrire ω sous forme cartésienne.

(2) Écrire ω sous forme exponentielle.

(3) En déduire les valeurs exactes de $\cos(\frac{\pi}{12})$ et $\sin(\frac{\pi}{12})$.

Exercice 3.

(1) Donner l'équation complexe du cercle $\mathcal{C}$ de centre Ω d'affixe $\omega = 1 + i$ et de rayon 1.

(2) Soient A, B, C trois points du plan d'affixes $z_A = i$, $z_B = 2 + i$ et $z_C = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{2+\sqrt{2}}{2}$. Montrer que A, B, C sont tous les trois sur le cercle $\mathcal{C}$.

(3) Déterminer un argument de $\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle en C.