MATH1B

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2021-2022
Juin 2022

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de Cours 1.

(1) Donner les définitions de "relation" dans un ensemble et de "relation d'équivalence" dans un ensemble.

(2) Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble E. Donner la définition de "classe d'équivalence" de $\mathcal{R}$.

(3) Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Soit $\mathcal{R}$ la relation sur $E = \mathbb{Z}$ définie par

$$a\mathcal{R}b \text{ si } n \text{ divise } b - a.$$

Montrer que $\mathcal{R}$ est un relation d'équivalence.

(4) Montrer que la relation d'équivalence $\mathcal{R}$ du (3) a exactement n classes d'équivalence.

Question de cours 2.

(1) Soient u et u' deux vecteurs du plan vectoriel euclidien ayant pour affixes respectives z et z'. Montrer que $\langle u, u' \rangle = \mathrm{Re}(z\overline{z'})$.

(2) Soient A et B deux points du plan affine euclidien d'affixes respectives z_A et z_B. Montrer que $AB = |z_B - z_A|$.

Exercice 1. Soient E un ensemble et $f : E \to E$ une application. Pour $n \in \mathbb{N}$ on définit l'application $f^n : E \to E$ par récurrence sur n en posant $f^0 = \mathrm{id}_E$ (l'identité de E) et, pour $n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f^n \circ f$ (la composée). Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $f^{n+1} = f \circ f^n$.

Exercice 2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad iZ^2 - (3+5i)Z + 8 + 4i = 0\,.$$

Exercice 3. On considère le plan $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire standard défini par

$$\left\langle \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right\rangle = x_1x_2 + y_1y_2\,.$$

(1) Soient u, v deux vecteurs dans $\mathbb{R}^2$ de norme 1 et θ une mesure de l'angle entre u et v. Montrer que $\langle u, v \rangle = \cos(\theta)$.

(2) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. En appliquant la partie (1) aux vecteurs $u = (\cos(\alpha), \sin(\alpha))$ et $v = (\cos(\beta), \sin(\beta))$, montrer l'égalité

$$\cos(\beta - \alpha) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) + \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,.$$

(3) Soient $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Montrer l'égalité

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos(\alpha)\,\cos(\beta) - \sin(\alpha)\,\sin(\beta)\,.$$