

**Analyse (Math1A)****Examen final**

— durée : 2 heures —

*L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.*

*La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.*

*Sauf mention explicite du contraire, toute réponse apportée doit être justifiée !*

**Exercice 1** (Questions de cours).

- (1) Énoncer (sans démonstration) la formule de Taylor–Young.
- (2) Rappeler les définitions de  $\cosh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\sinh : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , puis calculer toutes les dérivées successives de  $\cosh$  à partir de ces définitions.
- (3) Dédire des questions (1) et (2) le développement limité de  $\cosh$  au voisinage de  $x = 0$  à l'ordre  $2n$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

**Exercice 2.** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) := \frac{1}{1 + e^x}$ .

- (1) Justifier que  $f$  est indéfiniment dérivable sur  $\mathbb{R}$ .
- (2) Dresser le tableau de variations de  $f$ . (On y précisera les limites de  $f$  en  $\pm\infty$ .)
- (3) Calculer le développement limité de  $f$  au voisinage de  $x = 0$  à l'ordre 3.
- (4) Déterminer la tangente au graphe  $\Gamma_f$  au point d'abscisse  $x = 0$ , et préciser la position du graphe par rapport à cette tangente.
- (5) Déterminer toutes les primitives de  $f$  sur  $\mathbb{R}$ .

**Exercice 3.** On considère la fonction  $r$  définie par la fraction rationnelle

$$r(x) := \frac{x^3 + x^2 - 3x + 4}{x^2 + x - 2}.$$

- (1) Donner la décomposition en éléments simples de  $r$ .
- (2) En déduire une primitive  $\int r(x) dx$  de  $r$ .
- (3) Sur quels intervalles de  $\mathbb{R}$  cette primitive est-elle définie ?

**Exercice 4.** En intégrant par parties, calculer  $\int \arctan(x) dx$  puis  $\int x \arctan^2(x) dx$ .