Analyse (Math1A)

Examen de 2nde session
— durée : 2 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.
La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.
Sauf mention explicite du contraire, toute réponse apportée doit être justifiée !

Exercice 1 (Questions de cours).

(1) Énoncer (sans démonstration) le théorème des valeurs intermédiaires, et illustrer ce théorème en montrant que la fonction f définie par $f(x) := x^7 + x^3 + x + 1$ admet une racine réelle.

(2) Donner (sans justifications) les dérivées des fonctions suivantes, en précisant à chaque fois l'ensemble de dérivabilité :

$$\sin, \quad \arcsin, \quad \cos, \quad \arccos, \quad \tan, \quad \arctan.$$

Exercice 2. Soit la fonction réelle g définie par $g(x) := \exp\left(\frac{x-1}{x^2}\right)$ pour $x \in \mathbb{R}^*$.

(1) Montrer que g se prolonge par continuité en une fonction $\tilde{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

(2) Justifier que la fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}^*$, puis calculer sa dérivée.

(3) Montrer que $\tilde{g}$ est dérivable en 0 et préciser la valeur de $\tilde{g}'(0)$. Donner ensuite l'équation de la tangente au graphe de la fonction $\tilde{g}$ au point d'abscisse $x = 0$.

(4) Calculer $\lim_{x\to-\infty} g(x)$ et $\lim_{x\to+\infty} g(x)$.

(5) Dresser le tableau de variations de la fonction $\tilde{g}$.

(6) Esquisser le graphe de $\tilde{g}$, en rendant compte des informations obtenues ci-dessus.

(7) Pour chaque $y \in \mathbb{R}$, donner le nombre de solutions de l'équation $\tilde{g}(x) = y$. (On ne demande pas ici de justifier la réponse.)

Exercice 3. À l'aide de développements limités ou d'équivalents, calculer les limites suivantes :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln\left(\frac{(1+x)^4+(1-x)^4}{2}\right)}{x^2} \quad ; \quad \lim_{x\to 0} \frac{\cos(\sin(x)) - 1 + x^2/2}{x^4}.$$

Exercice 4. Calculer les primitives suivantes :

$$\int \frac{u^2-1}{u^2-4}\,\mathrm{d}u \quad ; \quad \int \frac{\sin^3(x)}{\cos^2(x)-4}\,\mathrm{d}x.$$