Examen du 6 mai 2022, 14h-16h.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Calculer le module et l'argument de :

$$(1-i)^3, \qquad \exp\left(-e^{\frac{5\pi i}{4}}\right).$$

2. Trouver le domaine de convergence de la série entière centrée en 2 suivante :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{3^n}(z-2)^n.$$

3. Déterminer la nature de tous les points singuliers de la fonction :

$$h(z) = \frac{e^{1/z}-1}{z-1}.$$

4. Soit g une fonction holomorphe sur l'ensemble $\mathbb{C}$ tout entier, nulle en 0 et telle que :

$$g(z) = 2x^2 - 4x - 2y^2 + iv(x,y)$$

pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z = x + iy$, x et y réels.

a. Déterminer $v(x,y)$.

b. Etablir une expression de $g(z)$ en fonction de z. Pour celà, on pourra exprimer x et y en fonction de z et de $\bar{z}$.

5. On considère la fraction rationnelle $f : z \mapsto \dfrac{1}{z(z-2)^4}$ de pôles 0 et 2.

a. Déterminer le développement en série entière de $z \mapsto \dfrac{1}{z}$ au voisinage de 2.

b. Quelle est la valeur du résidu de f au pôle 2 ?

c. Soit C le cercle de centre l'origine et de rayon 3. Ce cercle étant parcouru dans le sens positif, calculer l'intégrale curviligne suivante :

$$\int_C f(z)dz.$$

6. On veut calculer l'intégrale généralisée (convergente) :

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+2x+2}dx.$$

a. Vérifier que :

$$I = \Im\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{x^2+2x+2}dx\right).$$

où $\Im(z)$ désigne la partie imaginaire d'un nombre complexe z.

b. Quelle est la valeur de l'intégrale de $z \mapsto \dfrac{e^{iz}}{z^2+2z+2}$ le long du lacet constitué par le segment $[-R, R]$ et par le demi-cercle $\mathcal{C}_R = \{z \ / \ |z| = R, \ \Im(z) \geqslant 0\}$ parcouru dans le sens positif ? ($R > 0$ suffisamment grand).

c. En déduire la valeur de I. Une bonification sera donnée si l'on apporte des arguments pour la preuve de :

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{\mathcal{C}_R} \frac{e^{iz}}{z^2+2z+2}dz = 0.$$