Examen du 10 juin 2022, 13h30-15h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1.

- **a.** On rappelle que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\cos(z) = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$. Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de $\cos\left(\dfrac{\pi}{3} + i\right)$.
- **b.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4 = i$. On exprimera les solutions sous forme trigonométrique.

2. Soit α et β deux nombres complexes, à quelle condition (nécessaire et suffisante) la fonction $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$ est-elle holomorphe sur $\mathbb{C}$? Justifier votre réponse.

3. Soit Γ le carré unité, c'est-à-dire le bord de $[0,1] \times [0,1]$ parcouru une seul fois dans le sens positif. Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_\Gamma \Re(z)dz$. On regardera le carré unité comme un lacet constitué de quatre segments.

4. Soit C le cercle de centre l'origine et de rayon 3. On parcourt ce cercle dans le sens positif et une seule fois.

- **a.** Mettre le polynôme $z^4 - 1$ sous la forme d'un produit de polynômes du premier degré.
- **b.** Calculer l'intégrale curviligne $\displaystyle\int_C \frac{z^2}{z^4 - 1} dz$.

5. On considère la fraction rationnelle :

$$f(z) = \frac{z+4}{z^2(z^2 + 3z + 2)}.$$

- **a.** Quels sont les pôles de f ?
- **b.** Déterminer les nombres a, b, c et d tels que :

$$f(z) = \frac{a}{z} + \frac{b}{z^2} + \frac{c}{z+1} + \frac{d}{z+2}.$$

- **c.** On se place sur la couronne $1 < |z| < 2$. Calculer le développement en série de Laurent de f sur cette couronne.