Université de Bourgogne
L2 MaPC3A 2021/22

Examen

16 décembre 2021 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.
Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et f une fonction $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$.

a) Donner la définition d'une fonction f differentiable au point $x \in D$.

b) Donner la définition de la dérivée directionnelle $D_h f$ en direction $h \in \mathbb{R}^n$ au point $x \in D$.

c) Montrer que si f est différentiable au point $x \in D$ elle admet des dérivées directionnelles $D_h f$ $\forall h \in \mathbb{R}^n$.

Ex 2. Calculer la matrice de Jacobi, la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ suivante

$$F(x) = \big(a \wedge (x \wedge a)\big) \wedge x,$$

où $a \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x,y) = x^2y^2 - 5x^2y + 4x^2 - y^3 + 12y,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Soit D la partie bornée du plan délimitée par les courbes d'équation :

$$y = x + 2; \quad y = x^2 + 2x,$$

a) Trouver l'aire de D.

b) Calculer les coordonnées du centre de gravité de D.

Ex 5. Calculer l'intégrale

$$\int\limits_D \frac{x^2}{x^2 + y^2}\, dxdy,$$

où D est un quart de disque défini par

$$D = \{(x,y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x^2 + y^2 \leq R^2\}.$$