

Contrôle de rattrapage

7 juin 2022; durée : 2 h

Ex 1. Questions de cours. Soit E un espace euclidien.

- a) Donner la définition d'une application linéaire **orthogonale**,
- b) Montrer que pour toute application linéaire orthogonale $U^{-1} = U^t$,
- c) Montrer que $\det U = \pm 1$.

Ex 2. Soit $E = \mathbb{R}^3$. Trouver la matrice de la rotation d'angle $\pi/3$ autour du vecteur $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Ex 3. Calculer la divergence et le rotationnel du champ de vecteurs $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ suivant

$$F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x} + \mathbf{a}) \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{a}),$$

où $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^3$.

Ex 4. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^3 - 8y^2 + 4xy - 2x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 5. Calculer l'intégrale

$$\int \int_D (x - y) \, dx dy,$$

où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 4; \quad 2y = x; \quad y = 2x.$$