Université de Bourgogne
MathPC2A

Année 2021-2022
11 mai

Epreuve d'algèbre linéaire
Durée : 2h00

Exercice 1.

Dans $\mathbb{R}^3$ on définit les vecteurs suivants $e_1 \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, $e_2 \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, $e_3 \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$, et, $e_4 \begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}$.

1. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est libre ou liée.
2. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2, e_3\}$ est libre ou liée.
3. Indiquer en le justifiant si la famille $\{e_1, e_2\}$ est libre ou liée.

Exercice 2.
Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - 2t = 0, x + t = 0\},$$

$$G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - z + t = 0, y + z = 0, x + y + t = 0\}.$$

1) Trouver une base de F et G.
2) Les sous-espaces F et G sont-ils supplémentaires ? Justifier votre réponse.

Exercice 3.

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit A la matrice suivante

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (a-1) & 2 \\ 1 & 2 & -1 & (1-a) \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix}$$

1. Calculer le déterminant de la matrice A.
2. Pour $a = 5$ indiquer le rang de la matrice A et si elle est inversible.
3. Pour $a = 10$ indiquer le rang de la matrice A et si elle est inversible.

Exercice 4.

1. Calculer le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f associée à la matrice suivante

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Calculer les valeurs propres de f et les espaces propres associés.
3. Indiquer en le justifiant si l'endomorphisme f est diagonalisable.

Exercice 5.

Soit g l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ donnée par :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \longmapsto & \begin{pmatrix} x+z \\ 2x+2y-z \\ -2x-2y+z \\ 5x+6y-4z \end{pmatrix} \end{array}$$

1. Donner la matrice C de g dans les bases canoniques $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$.
2. Donner une base de ker g.
3. Donner une base de Im g.
4. $g^2 = g \circ g$ est-elle définie ? Si oui, donner la forme de g^2 et sa matrice.
5. Soient $u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $u_3 \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Montrer que $\mathcal{B} = (u_1, u_2, u_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6. Donner les matrices de passage entre les bases $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{B}$. (Dans un sens et dans l'autre).
7. Donner la matrice de g dans la base $\mathcal{B}$ au départ et la base canonique $\mathcal{C}_4$ à l'arrivée.