Contrôle continu, janvier 2022
Aucun document, calculatrice autorisée - durée : 1h30

Ce texte comporte **trois** exercices indépendants, sur 2 pages.

Exercice 1 – **Équations différentielles de degré 2 (barème approximatif 7 points)**

1. Résoudre l'équation $2y'' + 3y' + y = 0$ en supposant y(0)=0, y'(0)=1
2. Résoudre l'équation $2y'' + 3y' + y = 3$ en supposant y(0)=0, y'(0)=0
3. Résoudre l'équation $y'' + 2y' + y = 0$.
4. Résoudre l'équation $y'' - y' + y = 0$.

Exercice 2 – **Dissociation du chlorure de sulfuryle (barème approximatif 7 points)**

A 270 $°C$, le chlorure de sulfuryle SO_2Cl_2 noté A se dissocie totalement selon l'équation bilan

$$SO_2Cl_2(g) \rightarrow SO_2(g) + Cl_2(g)$$

Tous les constituants sont gazeux. On suit l'évolution de la réaction par mesure de la pression totale P dans le récipient, on obtient les résultats suivants :

t(min)	0	50	100	150	200	250
P (Pa)	40786	43985	46784	49450	51982	54248

On note $P_A(t)$ la pression partielle de chlorure de sulfuryle à l'instant t.
Par définition, la vitesse de réaction s'exprime $v = -\frac{dP_A}{dt}$. À partir du mécanisme réactionnel on peut établir que la réaction est d'ordre 1 : $v = kP_A$.

1. a) Établir que la pression P_A est régie par l'équation différentielle :

$$\frac{dP_A(t)}{dt} = -kP_A$$

b) Montrer que

$$P_A(t) = P_0 e^{-kt} \tag{1}$$

À partir d'un tableau d'avancement, on peut montrer que (admis)

$$P_A(t) = 2P_0 - P(t) \tag{2}$$

où $P_A(t)$ est la pression partielle de chlorure de sulfuryle, $P(t)$ la pression totale dans le récipient et P_0 la pression initiale.

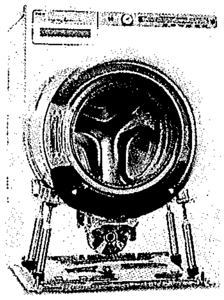
2. a) À partir des équations (1) et (2), donner l'expression de la pression $P(t)$ dans l'enceinte en fonction du temps.
b) En déduire que

$$ln(2 - P/P_0) = -kt \tag{3}$$

c) À l'aide d'une régression linéaire ou d'un tracé sur papier millimétré, vérifier que ces mesures sont en accord avec une cinétique d'ordre 1.
En déduire la constante de vitesse k.

Exercice 3 – **Vibrations d'un moteur (barème approximatif 6 points)**

Lorsqu'un moteur imparfaitement équilibré fonctionne, un balourd provoque des vibrations du châssis et il est nécessaire de prévoir un système de suspension. C'est par exemple le cas d'un lave-linge dans lequel la position du linge empêche d'équilibrer le tambour.



Données $m = 10{,}0\,\mathrm{kg}$; $k = 1{,}00 \cdot 10^6\,\mathrm{N \cdot m^{-1}}$; $\alpha = 250\,\mathrm{kg \cdot s^{-1}}$; $F_0 = 45 \cdot 10^3\,\mathrm{N}$; $g = 9{,}81\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$

Le moteur est assimilé à un point matériel de masse m et la suspension est modélisée par un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k, placé en parallèle avec un amortisseur qui exerce une force de frottement $\vec{f_v} = -\alpha\vec{v}$ (voir figure 2). La présence d'un balourd provoque l'apparition d'une force supplémentaire de la forme d'excitation sinusoïdale $\vec{F_e} = F_0\cos(\omega t)\,\vec{u}_z$ où ω est la pulsation (vitesse angulaire) du moteur.

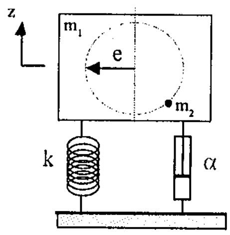


Figure 1

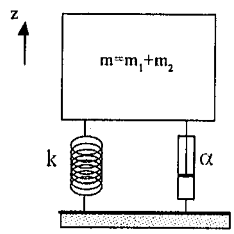


Figure 2

Le mouvement de la masse m est régie par l'équation différentielle

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos\omega t$$

1. a) Mettre l'équation différentielle sous la forme

$$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \frac{F_0}{m}\cos\omega t \qquad (4)$$

où l'on précisera les expressions de ω_0 et λ. Calculer ω_0 et λ (en précisant leur unité).

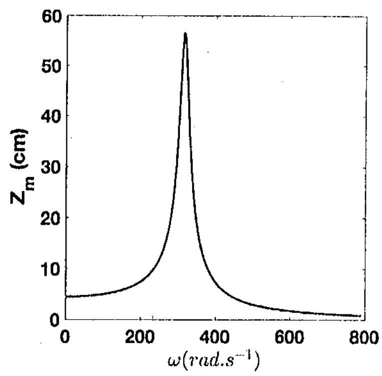
2. On étudie dans la suite le régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω. Utilisons la grandeur complexe $\underline{z}$ associée à $z(t) = Z_m\cos(\omega t + \phi)$:

$$\underline{z} = Z_m e^{j(\omega t + \phi)}$$

a) Exprimer les dérivée par rapport au temps $\underline{\dot{z}}$ puis $\underline{\ddot{z}}$
b) Quelle est la représentation complexe associée à $\frac{F_0}{m}\cos\omega t$?
c) $\underline{z}$ est régie aussi par l'équation différentielle (4). En déduire que

$$Z_m e^{j\Phi} = \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + j2\lambda\omega}$$

d) Exprimer l'amplitude Z_m des oscillations du mobile.
La figure ci-contre représente l'amplitude Z_m des oscillations du mobile en fonction de la pulsation d'excitation ω.
Lire approximativement l'amplitude des oscillations à la résonance.



e) Le balourd tourne à $\omega = 1000$ tours/min$=105\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$.
Lire approximativement $Z_m(\omega)$ sur la courbe. Vérifiez que le système est bien dimensionné pour éviter des déplacements trop importants.