L2 Parcours Informatique Électronique
MaIE3A- Mathématiques
Année universitaire 2021/2022

Contrôle Terminal

2 heures

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice **non programmable**.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = -2+2i$; $z_B = 0$; $z_C = -2+4i$ et $z_D = 1+3i$.
   (a) Calculer $\frac{z_C - z_A}{z_D - z_A}$.
   (b) Montrer que les droites (AC) et (AD) sont orthogonaux.
   (c) En déduire que le triangle ACD est rectangle et non isocèle.
   (d) Déterminer le lieu géométrique $(\mathcal{M})$ des points M dont l'affixe z vérifie $|(1-3i)z - 10| = 10$.
   (e) Montrer que les points A, B, C et D appartiennent à $(\mathcal{M})$.
2. Soit $P(z) = z^3 + 9iz^2 + 2(6i-11)z - 3(4i+12)$.
   (a) Montrer que P admet une racine réelle z_0.
   (b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
   (c) Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$, où a, b et c sont les nombres calculés à la question (2.b).
   (d) En déduire les racines du polynômes P.

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par : $M(t)\begin{cases} x(t) = 2t^2 - \frac{t^3}{3} + \frac{t^4}{4} \\ y(t) = 1 + t^2 - \frac{t^3}{6} + \frac{7t^4}{24}. \end{cases}$

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Déterminer le point stationnaire et dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.
3. Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.
4. Etudier les branches infinies en $\pm\infty$.
5. Dessiner la courbe.

Exercice 3

1. (a) Déterminer a, b et c tels que $\frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{x-2} + \frac{c}{x-3}$.
   (b) Calculer $\int \frac{x^2}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx$.
2. Calculer l'aire de la partie du plan limitée par la courbe $(\mathcal{C}_f)$ de la fonction $f(x) = -x^3 + 7x^2 - 10x + 5$, la courbe $(\mathcal{C}_g)$ de la fonction $g(x) = -x^2 + 4x + 3$ et les droites d'équation : $x = 1$ et $x = 2$.
3. Calculer $I_1 = \int_{1/2}^{e/2} t\ln(2t)dt$.
4. Calculer $I_2 = \int_1^2 \frac{x^2}{(1+x^3)^2}$

Exercice 4

On considère l'équation différentielle (E) : $y'' - y' = 5e^x - \sin(2x)$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière y_p de (E) de la forme $y_p(x) = e^x Q(x) + A\cos(2x) + B\sin(2x)$, où $Q(x)$ est un polynôme de degré 1 à chercher, A et B sont des constantes réelles à trouver.
3. En déduire la solution y de (E) vérifiant $y(0) = 0$ et $y'(0) = 0$.