L2 Parcours Informatique Électronique
MaIE3A- Mathématiques
Année universitaire 2021/2022

Examen de la session 2

2 heures

L'usage de tout document est interdit. Le seul dispositif électronique autorisé est la calculatrice **non programmable**.

Exercice 1

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

1. On désigne par A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = -1$; $z_B = 2 + i\sqrt{3}$; $z_C = 2 - i\sqrt{3}$ et $z_D = 3$.
   (a) Calculer les distances AB, BC et AC et en déduire la nature du triangle ABC.
   (b) Calculer le nombre complexe $\frac{z_A - z_C}{z_D - z_C}$.
   (c) Montrer que les droites (CA) et (CD) sont orthogonaux.
   (d) Montrer que le triangle DAC est rectangle et non isocèle.
2. On considère l'application T du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)z + 2 - i$.
   (a) Caractériser géométriquement l'application T.
   (b) Calculer l'image B' de B par l'application T.
3. Soit $P(z) = z^3 + (2+5i)z^2 + (-7+7i)z - 2i - 6$.
   (a) Montrer que P admet une racine imaginaire pure z_0 (c'est-à-dire $z_0 = i\omega$, où ω est un nombre réel.)
   (b) Déterminer les nombres complexes a, b et c tels que $P(z) = (z - z_0)(az^2 + bz + c)$.
   (c) Résoudre l'équation $az^2 + bz + c = 0$.
   (d) En déduire les racines de P.

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par : $M(t) \begin{cases} x(t) = 8 - 12t + 9t^2 - 2t^3 \\ y(t) = 10 - 20t + 16t^2 - 4t^3. \end{cases}$

1. Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.
2. Déterminer le point stationnaire et dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.
3. Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.
4. Etudier les branches infinies en $\pm\infty$.
5. Dessiner la courbe.

Exercice 3

1. Calculer $\int_0^4 (1 + |x-3|)^2 dx$.
2. Soient $(\mathcal{C}_f)$ et $(\mathcal{C}_g)$ les courbes des fonctions f et g définies pour tout $x > 0$ par : $f(x) = \sqrt{x}$ et $g(x) = x - 2$.
   (a) Représenter les fonctions f et g sur l'intervalle $[0, 5]$.
   (b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par les courbes $(\mathcal{C}_f)$, $(\mathcal{C}_g)$, l'axe des abscisses $(y = 0)$ et l'axe des ordonnées $(x = 0)$.
3. Calculer $\int \frac{x^3 - 4}{x^2 - x - 2} dx$.
4. Calculer $\int (4x - 1)e^{3x} dx$.

Exercice 4

On étudie l'intensité de courant $i(t)$ à l'instant t dans un circuit contenant une bobine d'induction L et une résistance R en séries soumises à une force électromotrice $A\cos(\omega t)$, où A et ω sont des constantes. $i(t)$ vérifie l'équation différentielle (E) : $L\frac{di}{dt} + Ri = A\cos(\omega t)$.

1. Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) et une solution particulière i_p de (E).
2. En déduire $i(t)$ sachant que $R = \omega = L = 1$, $A = 2$ et qu'au temps $t = 0$, on a $i(0) = 0$.