

Contrôle terminal

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents sauf une feuille manuscrite A4 recto-verso ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Pour chacune des suites suivantes, décider si la limite existe, et la calculer si elle existe.

(a) $\left(5 + (-1)^n \cdot \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$

(b) $\left((-1)^n + 5 \cdot \frac{1}{n} \right)_{n \geq 1}$

(c) $\left(\frac{2n^3 + \sin(n)n^2 + 57}{3n^3 - \cos(n)n + 12} \right)_{n \geq 0}$

2. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ avec $a_n = \frac{n^2 - 2 \cos(n)}{n - 4}$, $b_n = \frac{n^2 + 3 \sin(n)}{n - 6}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).

- (b) Calculer $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n)$ en justifiant les étapes du calcul.

3. Trouver les termes généraux des suites suivantes :

(a) $a_{n+2} = 6a_n - a_{n+1}$; $a_0 = 5$, $a_1 = -5$

(b) $b_{n+2} = 6b_{n+1} - 9b_n$; $b_0 = b_1 = 2$.

4. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes :

(a) $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(1+n)^2}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5n^2 + 3}{n^5 + n^3 + n - 2}$

5. Calculez $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$, puis devinez $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$ et vérifiez que vous avez bien deviné.

6. Soit

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 2 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

et soit $f: \mathbb{R}^5 \rightarrow \mathbb{R}^4$ définie par $f(v) = Av$.

- (a) Trouver une base de $\text{Im}(f)$.
 (b) Trouver une base de $\text{Ker}(f)$.
 (c) Trouver une matrice B telle que $\text{Im}(f) = \text{Ker}(g)$ où $g(v) = Bv$. (C'est à dire, décrire $\text{Im}(f)$ comme espace des solutions d'un système d'équations.)
 (d) Calculer $\text{Im}(f) \cap U$ avec le sous-espace vectoriel U engendré par les vecteurs

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$