CT — Session 2

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents sauf une feuille manuscrite A4 recto-verso ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Pour chacune des suites suivantes, décider si la limite existe, et la calculer si elle existe.
   (a) $\left(\dfrac{2n^3+\sin(n)n^2+57}{3n^3-\cos(n)n+12}\right)_{n\geq 0}$
   (b) $\left((-1)^n+5\cdot\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
   (c) $\left(5+(-1)^n\cdot\dfrac{1}{n}\right)_{n\geq 1}$
2. (a) Montrer que les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n=\dfrac{n^2-2\cos(n)}{n-7}$, $b_n=\dfrac{n^2+3\sin(n)}{n-3}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).
   (b) Calculer $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)$ en justifiant les étapes du calcul.
3. Trouver les termes généraux des suites suivantes :
   (a) $a_{n+2}=6a_n-a_{n+1}; a_0=5, a_1=-5$
   (b) $b_{n+2}=6b_{n+1}-9b_n; b_0=b_1=2.$
4. Décidez de la convergence/divergence des séries suivantes :
   (a) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{n}{7(1+n)^2}$,
   (b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^3+5n^2+3}{n^6+n^3+n-2}$
5. Calculez $\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$, puis devinez $\begin{pmatrix}0&1&1&1\\1&0&1&1\\1&1&0&1\\1&1&1&0\end{pmatrix}^{-1}$ et vérifiez que vous avez bien deviné.
6. Soit
$$A=\begin{pmatrix}1&1&4&3&4\\2&2&3&1&3\\3&2&2&0&1\\4&3&1&-2&0\end{pmatrix}$$
   et soit $f\colon\mathbb{R}^5\to\mathbb{R}^4$ définie par $f(v)=Av$.
   (a) Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (b) Trouver une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (c) Trouver une matrice B telle que $\mathrm{Im}(f)=\mathrm{Ker}(g)$ où $g(v)=Bv$. (C'est à dire, décrire $\mathrm{Im}(f)$ comme espace des solutions d'un système d'équations.)
   (d) Calculer $\mathrm{Im}(f)\cap U$ avec le sous-espace vectoriel U engendré par les vecteurs
$$\begin{pmatrix}1\\0\\2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\2\end{pmatrix}$$