Mathématiques pour l'informatique et l'électronique, MaIE1A

Contrôle terminal

5 Janvier 2022 / 13 h — 15 h, hors tiers temps

Tout document autre que ceux distribués pendant l'épreuve n'est pas autorisé. Les téléphones portables et autres moyens de communication ne sont pas autorisés. Les calculettes personnelles ne sont pas autorisées pour cette épreuve.

Chaque étudiant dispose sur sa table du matériel adéquat pour composer, y compris la carte d'étudiant, dès le début de l'épreuve. Aucun échange entre étudiants ne sera toléré une fois le sujet distribué.

La qualité de la rédaction ainsi que la présentation entrent pour une part significative dans l'évaluation des copies. *Tous les résultats doivent être suffisamment justifiés*.

Sur la copie principale figure une case où l'étudiant renseigne le nombre d'intercalaires utilisés. Si celle-ci n'est pas renseignée, cela signifie qu'il n'y a pas d'intercalaires.

Il ne sera distribué qu'un seul énoncé par étudiant.

1. Fonctions

1.1. Donner l'ensemble de définition maximal de $\sqrt{x^2+2x-5}$.

1.2. Calculer la dérivée de $x\ln x$. En déduire une primitive de $\ln x$.

1.3. Calculer la dérivée de $\sin\frac{1}{x}$.

1.4. Soit $f(x) \stackrel{\text{déf}}{=} x\sin x$. Calculer f', f''.

2. Théorème des valeurs intermédiaires

Soit $P(x) \stackrel{\text{déf}}{=} 1+x+2x^2+3x^3+4x^4+5x^5$.

2.1. Énoncer le théorème des valeurs intermédiaires sur $]-\infty;+\infty[$.

2.2. Montrer que l'équation $P(x)=0$ admet une solution réelle.

2.3. Montrer que toutes les racines réelles de P sont négatives.

2.4. En déduire un encadrement de la plus grande racine réelle de P.

3. Théorème des accroissements finis

Soit $f(x) = e^x$.

3.1. Énoncer le théorème des accroissements finis sur $[a;b]$ avec $a < b$.

3.2. Peut-on appliquer ce théorème à f sur $[0;t]$ si t désigne un nombre positif ?

3.3. En déduire que pour tout $t \geq 0$, $\mathrm{e}^t - 1 \leq t\,\mathrm{e}^t$.

4. Intégration

4.1. Calculer $\displaystyle\int_{t=0}^{1} x^2 - x + 2\,\mathrm{d}x$.

4.2. Calculer : $\displaystyle\int_{t=0}^{1} 2^t\,3^{2t}\,\mathrm{d}t$.

4.3. Calculer $\displaystyle\int_{x=0}^{\pi} \cos x\ \mathrm{e}^x\ \mathrm{d}x$.

5. Formes indéterminées

On appliquera la **règle de l'Hôpital** : a et ℓ désignent des nombres, f et g désignent deux fonctions dérivables au voisinage de a,

$$\text{si } \lim_a f = \lim_a g = 0 \text{ et } \lim_a \frac{f'}{g'} = \ell \text{ alors } \lim_a \frac{f}{g} = \ell$$

5.1. Donner, si elle existe, la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1}$ pour $m, n \in \mathbb{N}^*$.

5.2. Donner, si elle existe, la valeur de $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{1 - \cos x}$.

6. Équations différentielles ordinaires

6.1. Soit l'équation différentielle ordinaire (E) $y'' - 3y' + 2y = 0$.

6.1.1. r est un nombre. Quelle est la signification mathématique de « e^{rx} est une solution de (E) » ?

6.1.2. Quelles sont les solutions de (E) de la forme e^{rx} ?

6.1.3. En déduire toutes les solutions de (E).

6.1.4. En déduire la solution de (E) qui vérifie $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$.

6.2. Soit (E) $y'' + 4y' + 4y = 0$.

6.2.1. Quelles sont les solutions de la forme e^{rx} où r est un nombre ?

6.2.2. En déduire toutes les solutions de (E).

6.2.3. C désigne un nombre. Si y est une solution de (E), $y + C$ est une solution de quelle équation semblable à (E) ?

6.2.4. En déduire toutes les solutions de (E') $y'' + 4y' + 4y = 4$.