Examen - Licence 2 - Info4C - Durée 2H

Université de Bourgogne - 2021/22

Tous les documents sont autorisés

Partie I (8pts)

Exercice 1 (3pts):
A. Donner la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$a_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 0 & \text{si} \quad n = 1 \\ -a_{n-2} & \text{si} \quad n \geq 2, \end{cases} \quad b_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 1 & \text{si} \quad n = 1 \\ 0 & \text{si} \quad n = 2 \\ 2 \cdot b_{n-1} - b_{n-2} + 2 \cdot b_{n-3} & \text{si} \quad n \geq 3. \end{cases}$$

B. Quelle relation existe entre les suites a_n et b_n ?

Exercice 2 (3pt): Donner la forme close et la fonction génératrice pour les suites :

$$c_n = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad n = 0 \\ 4 \cdot c_{n-1} - 2^n & \text{si} \quad n > 0, \end{cases} \quad d_n = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad n = 0 \\ 2 \cdot d_{n-1} + 4^{n-1} & \text{si} \quad n > 0. \end{cases}$$

Exercice 3 (2pts): Combien de mots de longueur n sur l'alphabet $\{a, b, c, d\}$ contiennent un nombre impair de a ?

Partie II (12pts)

Exercice 4 (4pts): Soit E l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont des entiers positifs ou nuls. On définit sur E la relation $(x, y) \sim (u, v) \iff$ 2 divise $x - u$ et 3 divise $y - v$. Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence sur E. Déterminer l'ensemble quotient $E/_\sim$.

Exercice 5 (5pts): On considère la relation S définie sur l'ensemble des couples (x, y) où x et y sont deux entiers strictement positifs: $(x, y)S(a, b)$ si et seulement si on a : x divise a, et y divise b.

1) Est-ce une relation d'ordre? Justifiez votre réponse.

2) Dessiner le diagramme de Hasse pour l'ensemble des couples (x, y) où $1 \leq x \leq 4$ et $1 \leq y \leq 4$.

3) Est-ce un treillis? Si oui, est-il distributif?

Exercice 6 (3pts): En utilisant la méthode des tableaux de Karnaugh, donner la forme normale disjonctive de la fonction booléenne d'arité quatre suivante :

$$f(a, b, c, d) = (\bar{a} \vee b) \wedge (\bar{c} \vee d) \wedge (a \vee \bar{d}).$$