

## EXAMEN L2 d'Info3A, le 13-12-2021

Répondez dans l'ordre aux dix questions. Numérotez vos réponses. Chaque réponse est notée sur 2 points. N'utilisez pas de feuille intercalaire.

A. Soient  $a, b, u, v$  quatre entiers relatifs tels que  $au + bv = 1$ . Quel est l'inverse de  $a$  modulo  $b$ , de  $a$  modulo  $v$ , de  $b$  modulo  $a$ , de  $b$  modulo  $u$ ? Répondez en 4 lignes au plus. N'utilisez pas de valeurs numériques pour  $a, b, u, v$ .

B.1. Utilisez l'algorithme d'Euclide pour calculer  $g$ , le PGCD de  $a = 41$  et  $b = 28$ , ainsi que les deux nombres (entiers relatifs) de Bézout  $u, v$  tels que  $au + bv = g$  (rappel :  $(u, v)$  est de norme minimale). Disposez vos calculs en tableau, avec les colonnes :  $a, b, r, q, g, u, v$  :  $r$  pour le reste de  $a \div b$ ,  $q$  pour le quotient. Dans la dernière ligne,  $u$  vaut 1 et  $v$  vaut 0.

B.2. Ajoutez 2 colonnes  $u(k)$  et  $v(k)$  au tableau. Dernière ligne :  $u(k) = 1, v(k) = k$ .

B.3. Idem B.1 mais utilisez la formulation matricielle.

C. Les étiquettes sur les arcs du graphe  $G$  (Fig. 1) sont des durées. Indiquez sur les sommets du graphe les dates au plus tôt et au plus tard, et mettez en valeur les sommets et les arcs critiques.

D. Les étiquettes sur les arcs du graphe  $G$  (Fig. 1) sont des distances. Indiquez sur les sommets du graphe leur distance depuis le sommet source de  $G$ , et mettez en valeur les arcs de l'arbre des plus courts chemins.

E. Ignorez les orientations (uniquement pour cette question) des arcs du graphe  $G$  (Fig. 1). Les étiquettes sur les arêtes sont des coûts. Mettez en valeur l'arbre couvrant de  $G$  de coût minimal. Donnez les noms des deux algorithmes vus en cours pour résoudre ce problème.

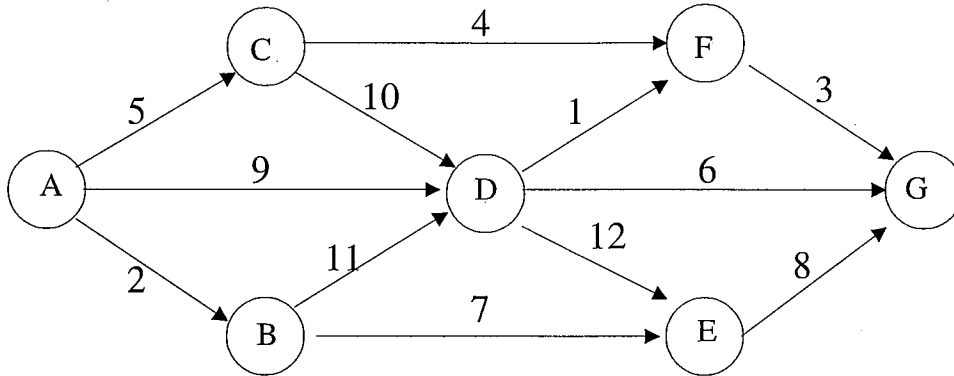


FIGURE 1 – Le graphe  $G$ .

F.1. Les étiquettes sur les arcs de  $G$  (Fig. 1) sont des capacités (ou débits maximaux). Dessinez un flot de débit maximal. Sur chaque arc, indiquez le débit du flot (par exemple  $d \leq C$ , avec  $d$  le débit et  $C$  la capacité). Dessinez l'arc de retour. Étiqueter chaque sommet par le débit de flot entrant (et sortant). Les graphes d'écart ne sont pas demandés.

F.2. (suite de F.1) Dessinez la coupe de capacité minimale. Rappels : sa capacité est la somme des capacités des arcs traversant la coupe, de la source vers le puits ; elle est égale au débit du flot maximal.

G. Dessinez le graphe réduit de  $G$ , de telle façon que tous les arcs aillent de gauche à droite. Rappels : chaque composante fortement connexe du graphe initial donne un sommet de son graphe réduit ; deux sommets distincts  $a$  et  $b$  sont dans la même composante fortement connexe ssi  $G$  contient un chemin de  $a$  vers  $b$  et un chemin de  $b$  vers  $a$  ; le graphe réduit ne contient aucun cycle ; chaque composante fortement connexe est maximale pour l'inclusion. Vous étiquetterez chaque sommet du graphe réduit par les sommets correspondants dans  $G$ . Si vous préférez, vous pouvez définir le graphe réduit de  $G$  en une phrase d'une ligne.