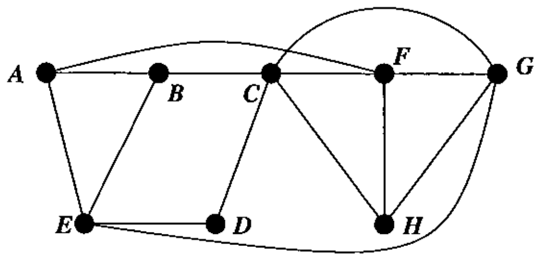
Durée 2h, tous documents autorisés
Sujet recto/verso, le barème est donné à titre indicatif

Exercice 1 (3 pts)

1. Combien de faces possède un graphe planaire de 7 sommets et 15 arêtes ?
2. Dessiner un tel graphe et numéroter ses faces.
3. Existe-t-il un graphe planaires avec 7 sommets et 16 arêtes ? Justifier.

Exercice 2 (7 pts)

Pour le graphe ci-dessous :



1. Lister toutes les cliques maximales.
2. Donner l'ordre de parcours des sommets et l'arbre produit par l'algorithme BFS puis DFS à partir du sommet A (on supposera que les voisins d'un sommet sont pris par ordre alphabétique).
3. Existe-t-il un ordre de coloration des sommets de ce graphe pour lequel l'algorithme glouton exécuté avec cet ordre **ne produit pas** une coloration optimale des sommets ? Justifier.
4. Donner la coloration produite par l'algorithme DSATUR sur ce graphe, en supposant qu'à degré de saturation et degré égal, le choix du sommet à colorier est fait suivant l'ordre alphabétique des sommets. On spécifiera à chaque étape, le sommet colorié et les degrés de saturation actualisés des autres sommets.

Tourner la page SVP

Exercice 3 (5 pts)

Pour deux entiers n et p, le graphe circulant $C_n(p)$ est le graphe non orienté d'ordre n où les sommets sont les entiers entre 0 et $n-1$ et les arêtes sont les paires (i, j) telles que $j = i \pm 1 \mod n$ ou $j = i \pm p \mod n$. Par exemple, le graphe circulant $C_5(2)$ est un graphe complet à cinq sommets.

1. Dessiner $C_7(2)$ et $C_7(3)$. Ces deux graphes sont-ils isomorphes ? Justifier.
2. Quel est le diamètre de $C_7(2)$? Plus généralement, exprimer le diamètre de $C_n(2)$ en fonction de n.
3. Pour le graphe $C_7(3)$, calculer le nombre chromatique χ, indice chromatique χ' et nombre chromatique total χ''.

Exercice 4 (5 pts)

Soit le réseau ci-dessous, les valeurs sur les arcs représentant leur capacités.

1. En utilisant l'algorithme de Ford-Fulkerson, trouver le flot maximum entre s et t. La liste des chaînes augmentantes sera présentée en ordre décroissant des valeurs. Justifier la réponse en exhibant une coupe minimum.
2. Si maintenant les valeurs sur les arcs représentent leur coût, donner l'arbre des plus court chemins produit par l'algorithme de Dijkstra à partir du sommet s. Les étapes de l'algorithme seront représentées par un tableau montrant l'évolution des distances depuis s ainsi que le sommet choisi.