L3 MATHS

Université de Bourgogne, Mathématiques Année universitaire 2021–2022

Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

Examen final

— durée : 3 heures —

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés.

La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée devra être soigneusement justifiée.

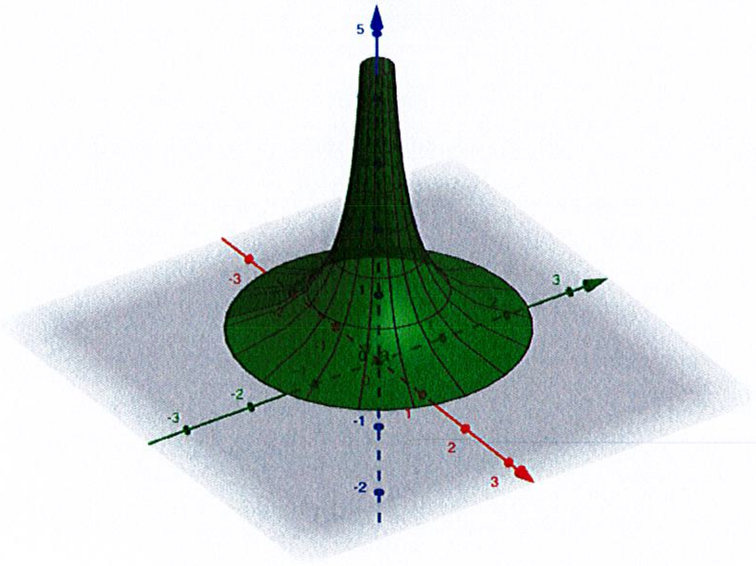
Exercice 1. (1) Rappeler les définitions des notions soulignées ci-dessous, *telles qu'elles ont été introduites en cours* (dans le chapitre sur les courbes paramétrées dans l'espace) :
- courbe paramétrée régulière ;
- vecteur tangent unitaire d'une courbe paramétrée régulière ;
- courbe paramétrée par longueur d'arc ;
- courbure d'une courbe paramétrée régulière ;
- courbe paramétrée birégulière ;
- repère de Frenet d'une courbe paramétrée birégulière ;
- torsion d'une courbe paramétrée birégulière ;

(2) Énoncer le « Théorème fondamental des courbes dans l'espace » sous la forme d'une bijection entre deux ensembles, dont on rappellera précisément les définitions.

Exercice 2 (Trompette de Torricelli).
Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ fixée. On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\varphi(u, v) := \left(\frac{a\cos(u)}{v}, \frac{a\sin(u)}{v}, v\right)$$

et dont le support $S := \varphi(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*)$ est représenté ci-dessous partiellement en prenant $a := 1$:



(1) À quelle famille de surfaces (vue en cours) S appartient-elle ?

(2) Montrer que la nappe paramétrée φ est régulière.

Dans toute la suite de l'exercice, on fixe un point $(r, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*$, on note $p := \varphi(r, s) \in S$ et $f := \frac{\partial \varphi}{\partial u}(r, s)$, $g := \frac{\partial \varphi}{\partial v}(r, s)$.

(3) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f, g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(5) Calculer la courbure de Gauss K_p de S au point p, et en déduire la position de S relativement à son plan tangent affine T_pS.

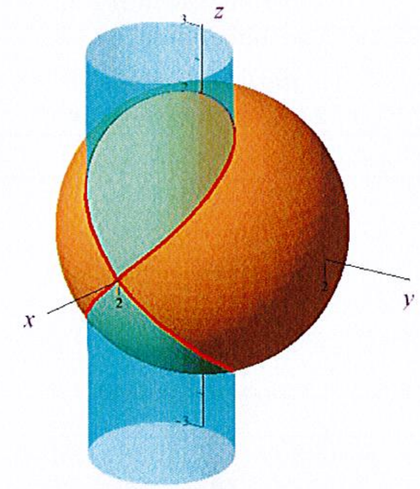
Exercice 3 (Fenêtre de Viviani).

Soit $r \in \mathbb{R}_+^*$ fixée. On considère dans l'espace $\mathbb{R}^3$ (de coordonnées x, y, z) les deux surfaces suivantes :

— la sphère S de centre $(0, 0, 0)$ et de rayon $2r$,

— le cylindre $C := T \times \mathbb{R}$ où $T \subset \mathbb{R}^2$ désigne le cercle centré en $(r, 0)$ et de rayon r.

Nous nous intéresserons à leur intersection $V := S \cap C$ qui est appelée *fenêtre de Viviani*. Voici, dans le cas où $r := 1$, une représentation de S, C et V :



(1) Donner (sans justification) des équations cartésiennes pour S et C.

(2) Rappeler pourquoi S et C sont des sous-variétés de $\mathbb{R}^3$ de dimension 2.

(3) Déterminer les points de V où l'intersection de S et C est transverse. Que peut-on en déduire quant à la nature de ce sous-ensemble de la courbe V ?

(4) Montrer que V est le support de la courbe paramétrée $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$\alpha(t) := \big(r(1 + \cos(t)), r\sin(t), 2r\sin(t/2)\big).$$

(5) Après avoir observé que α est 4π-périodique, déterminer (s'il en existe) les points doubles de α sur l'intervalle $]-2\pi, 2\pi]$.

(6) La courbe paramétrée α est-elle régulière ? Calculer la courbure κ de α là où elle est régulière, et préciser les valeurs de $\kappa(0)$ et $\kappa(2\pi)$.

(7) La courbe paramétrée α est-elle birégulière ? Calculer la torsion $\tau(t)$ de α aux instants $t = 0$ et $t = 2\pi$, puis commenter les résultats obtenus.