Université de Bourgogne
UFR de Sciences et Techniques
Département IEM

Licence de Sciences pour l'Ingénieur
Parcours Mécanique et Électronique

Équations Différentielles Ordinaires

Évaluation Terminale
Première Session

Durée : 1H50
Documents autorisés : reproduction papier des diapositives de cours et notes manuscrites personnelles

Liminaires

Inscrivez sur votre copie d'examen, et recopiez sur vos feuilles annexe et intercalaires éventuelles, dans les cases `No d'anonymat`, un `pseudonyme` composé de trois lettres et trois chiffres tous différents que vous choisirez à votre guise.

Si vous utilisez des feuilles intercalaires, numérotez $1R$ le *recto* de la première et $1V$ son *verso*, $2R$ le *recto* de la deuxième et $2V$ son *verso*, etc... Reportez, dans la case prévue à cet effet sur la copie double, le nombre d'intercalaires utilisées sans compter la feuille annexe.

Si vous êtes amené à utiliser à plusieurs reprises des méthodes numériques propres à un domaine particulier, il vous est demandé de montrer l'étendue de vos connaissances en variant les méthodes employées.

1 Questions de cours

1.1 Questionnaire simple

Donnez une réponse courte (un mot, une phrase ...) aux questions suivantes.

1.1.1 Peut-on utiliser la fonction exponentielle dans le cadre d'une approximation linéaire ?

1.1.2 Quelles sont les limites du type *integer* ?

1.1.3 Qu'est ce qui différencie la méthode des trapèzes de la méthode de Simpson ?

1.1.4 Est-il pertinent de vérifier l'égalité d'un nombre réel à zéro ?

1.1.5 Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires.

1.1.6 Existe-t-il une ou plusieurs méthodes numériques permettant de résoudre l'équation $f(x) = a$ et, si oui, citez en une.

1.1.7 Qu'est ce que la matrice de Jacobi ?

1.1.8 Quel est l'ordre du modèle *SIR* ?

1.1.9 Qu'est ce qui différencie l'interpolation de l'approximation ?

1.1.10 Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de Gauss ?

1.1.11 Quelle type de méthodes numériques permet de déterminer la valeur moyenne d'une fonction entre deux bornes ?

1.1.12 Dans quel domaine scientifique est utilisé le modèle *SIR* ?

1.1.13 Présentez succinctement la méthode LU.

1.1.14 Pourquoi doit-on parfois intégrer numériquement une fonction ?

1.2 Règle et crayon

Reportez, sur la feuille annexe, les trois premières positions, notées $X_N^{\{0\}}$, $X_N^{\{1\}}$ et $X_N^{\{2\}}$, de la recherche du zéro de la fonction $f(x)$ par la méthode de Newton.

2 Programmation : Un monde de pâquerettes

Cette série de questions est une simplification du modèle *DaisyWorld* développé par Andrew J. WATSON et James E. LOVELOCK dans le cadre de la *Théorie* GAÏA [1].
L'unité de temps est le million d'année et l'unité de température est le KELVIN.

2.1 Flux solaire

La planète considérée dans ce modèle est chauffée par un soleil dont le flux $F_L(t)$ varie linéairement de la valeur minimale $F_I = 500\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ à la valeur maximale $F_S = 1400\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ sur une durée de 200 millions d'années.

Écrivez le programme `C` qui enregistre dans le fichier `flux_solaire.dtx` l'instant et la valeur du flux solaire par pas d'un million d'années à raison d'une ligne par pas formatée comme suit :

```
  0  500.00
...
200 1400.00
```

2.2 Température planétaire

La température T_P de la planète suit la loi de STEFAN-BOLTZMANN :

$$T_P = \sqrt[4]{\frac{F_L(0)(1 - A_P(T_P))}{\sigma}}$$

où $F_L(0)$ est le flux solaire supposé avoir, pour cette question uniquement, une valeur constante de $1000\,\mathrm{W\,m^{-2}}$, σ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN valant $5{,}67 \times 10^{-8}\,\mathrm{J\,s^{-1}\,m^{-2}\,K^{-4}}$ et A_P est l'albédo de la planète, c-à-d sa capacité à réfléchir la lumière valant de 0 (absorption totale) à 1 (réflexion totale).

L'albédo A_P est supposé suivre, pour cette question uniquement, la loi :

$$A_P(T_P) = 1 - \frac{1}{1 + e^{-0,2(T_P - 300)}}$$

Écrivez le programme `C` permettant de déterminer la température de la planète connue pour être unique entre $285\,\mathrm{K}$ et $315\,\mathrm{K}$.

1. "Biological homeostasis of the global environment : the parable of Daisyworld", Tellus(1983), 35B, p284-289

2.3 Un monde de pâquerettes

Le planète considérée dans ce modèle est partiellement recouverte de pâquerettes blanches dont l'albédo, noté A_F, vaut 0,25 alors que l'albédo du sol nu, noté A_S, vaut 0,5.

La proportion de sol recouvert de pâquerettes étant notée α, l'albédo planétaire s'exprime par la relation $A_P(\alpha) = A_S + \alpha(A_F - A_S)$.

À l'origine du temps, 1% de la surface de la planète est recouverte de pâquerettes.

Au cours du temps, les pâquerettes croissent selon la loi différentielle :

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} = \alpha((1-\alpha)\beta(T_P) - \gamma)$$

Dans cette relation :

— $\beta(T_P)$ est le taux d'apparition des pâquerettes suivant la loi

$$\beta(T_P) = \begin{cases} 4\kappa \dfrac{(T_P - T_I)(T_S - T_P)}{(T_S - T_I)^2} & \text{si } T_I \leq T_P \leq T_S \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où *kappa* est une constante de normalisation temporelle égale à 1.0 et $[T_I : T_S]$ est l'intervalle de température de croissance des pâquerettes égal à $[278\mathrm{K} : 313\mathrm{K}]$;

— γ est le taux de disparition des pâquerettes égal à 0,3.

Par ailleurs, la température de la planète suit la loi de STEFAN-BOLTZMANN :

$$T_P = \sqrt[4]{\frac{F_L(t)(1 - A_P(\alpha))}{\sigma}}$$

où le flux solaire $F_L(t)$ varie linéairement de la valeur minimale $F_I = 500\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ à la valeur maximale $F_S = 1400\,\mathrm{W\,m^{-2}}$ sur une durée de 200 millions d'années, σ est la constante de STEFAN-BOLTZMANN valant $5{,}67 \times 10^{-8}$ et A_P est l'albédo de la planète.

2.3.1 Simulation

Écrivez le programme `C` qui affiche l'évolution de la proportion de pâquerettes.

2.3.2 Amélioration du modèle

Que se passe-t'il lorsque la proportion de pâquerettes s'annule ?
Quelle amélioration pourriez vous proposer pour éviter ce phénomène ?
Note : il n'est pas demandé de modifier le programme précédent.