Licence Sciences Technologies Santé — Université de Bourgogne
L2 - Elec4A — Traitement du Signal

*Examen final – durée 2h – Convolution, échantillonnage et espace de Fourier*
*Calculatrice et une feuille A4 manuscrite R/V autorisés*

• **Exercice 1** – *Convolution discrète*

**1.1** Etablissez la forme générale de l'équation de convolution à partir de la moyenne pondérée suivante : $s_M[k] = (3s[k] + 2s[k-1] + s[k-2])/6$.

**1.2** Explicitez les éléments composant cette équation et leur rôle.

**1.3** Calculez $s_M$ pour le signal $s$ :

$$s[k] \;=\; \{...0\ 4\ 5\ 4\ 3\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ -1\ 0\ ...\} \tag{1}$$

Quel est l'intérêt de la dissymétrie de cette moyenne pondérée.

**1.4** Identifiez la réponse impulsionnelle dans $s_M$. Remarque ?

**1.5** Calculez la dérivée $d_{s_M}$ de $s_M$ avec la réponse impulsionnelle $g[k] = [1, \underline{0}, -1]/2$.

**1.6** Montrez que $g$ ne contient pas qu'une dérivée et qu'elle peut être décomposée.

**1.7** Soit la réponse impulsionnelle en lien avec la question 1). Définissez une dérivée $g$ d'ordre 4 à partir de celle-ci. $g$ dérive donc 4x et lisse en même temps.

**1.8** Tracez $g$ et reliez les points par des traits discontinus pour mieux la visualiser.

**1.9** Soit le signal échelon $Y[k]$ ($Y[k] = 1$ si $k \geq 0$, 0 sinon). Calculez $g_1[k] = g * Y[k]$. Que remarquez-vous en lien avec la question 7) ?

**1.10** Continuez en calculant $g_{n+1}[k] = g_n * Y[k]$ en partant de $n = 1$, soit $g_1$, jusqu'à $n = 3$ . Que remarquez-vous ? Déduisez une équation réciproque de celle définissant $g$. Que permet d'obtenir cette nouvelle équation. Quel est, ici, le rôle de $Y$ ?

**1.11** Calculez $g_5[k]$. Que représente $g_5$ ?

• **Exercice 2** – *Séries de Fourier*

Soit le signal périodique $s(t)$ représenté ci-dessous.

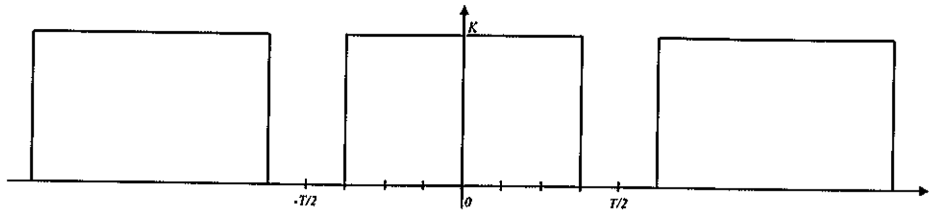
**2.1** Calculez, en tenant compte de l'amplitude $K$, les $\{a_0, a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ou les $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de la décomposition de $s(t)$ dans la base de Fourier :

$$\left\{\begin{array}{lcl} \{a_n & = & \frac{2}{T}\int_T s(t)\cos n\omega t\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \\ \{b_n & = & \frac{2}{T}\int_T s(t)\sin n\omega t\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}^{*+}} \\ \{c_n & = & \frac{1}{T}\int_T s(t)e^{-jn\omega t}\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}\right. \tag{2}$$

**2.2** Reconstruisez, avec les paramètres $K$ et $T$, le signal $s(t)$ à partir des coefficients calculés précédemment:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s(t) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ s(t) & = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \end{array}\right. \tag{3}$$

Signal $s(t)$




**2.3** Listez les fréquences. Comparez la fréquence du motif du signal s(t) défini par morceau (figure) et les fréquences des harmoniques qui constituent, au sens de Fourier, ce signal. Comparez également avec le signal carré *classique* ($K$ pour une demi-période, 0 pour l'autre).

## • Exercice 3 – *Echantillonnage*

**3.1** Quelle fréquence d'échantillonnage choisir pour le signal $s(t) = 2\cos[2\pi(f_1 - K\sin(2\pi f_2 t))t]$ afin de le représenter correctement, sans perte d'information sur le contenu fréquentiel, dans sa version discrète ?

**3.2** Idem pour le signal $s(t) = sin(250t) + sin(3\omega t)$

**3.3** Idem pour le signal $s(t) = 6 + sin(\omega_1 t)sin(7\omega_2 t)$

**3.4** Dessinez le signal échantillonné (fréquence $f_e$) à partir du signal carré continu de fréquence de motif $f_0$ avec $f_e = 10f_0$. Quel est le contenu fréquentiel de la version échantillonnée ? (l'équation exacte n'est pas demandée, seulement une discussion-description).

## • Exercice 4 – *Transformée de Fourier à Temps Discret*

**4.1** Soit la réponse impulsionnelle $g[k] = [1 \ \ -1]$. Par souci de simplification, nous prendrons ici $T_e = 1$ : calculez sa TFTD $G(\omega)$ :

$$G(\omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} g[k]e^{-j\omega k T_e} \tag{4}$$

**4.2** Tracez $|G(\omega)|$ ou $|G(f)|$. Quel est le comportement fréquentiel ?

**4.3** Mêmes questions avec le filtre $g[k] = [1 \ \ -1] * [1/ -1]$.

Remarque :
$1 - \cos 2a = 2\sin^2 a$
$\sin(p)\sin(q) = \frac{1}{2}(\cos(p-q) - \cos(p+q))$