Examen session 2 – Convolution, échantillonnage et espace de Fourier
Calculatrice et une feuille A4 manuscrite R/V autorisés

• **Exercice 1** - *Convolution discrète*

1.1 Rappelez la forme générale de l'équation de convolution dans le domaine discret.

1.2 Explicitez le rôle de chaque élément composant cette équation.

1.3 Calculez $s_M[k] = h * s[k]$ avec $h[k] = [\underline{4}\ 3\ 2\ 1]/10$ et

$$s[k] \quad = \quad \{...0\ 1\ 2\ 3\ 3\ 3\ 2\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ ...\} \tag{1}$$

1.4 Identifiez la réponse impulsionnelle dans s_M. Expliquez la causalité.

1.5 Calculez la dérivée d_{s_M} de s_M avec la réponse impulsionnelle $g[k] = [1\ \ -\underline{2}\ \ 1]$.

1.6 Montrez que d_{s_M} peut être obtenue directement à partir de s et explicitez la réponse impulsionnelle correspondante.

1.7 Soit $f[k] = [4\ \ -13\ \ 14\ \ -5\ \ 0\ \ 1\ \ -2\ \ 1]$. Est-ce une dérivée ? Si oui, quel est l'ordre de cette dérivée ? Quelle est la composante éventuelle de lissage ?

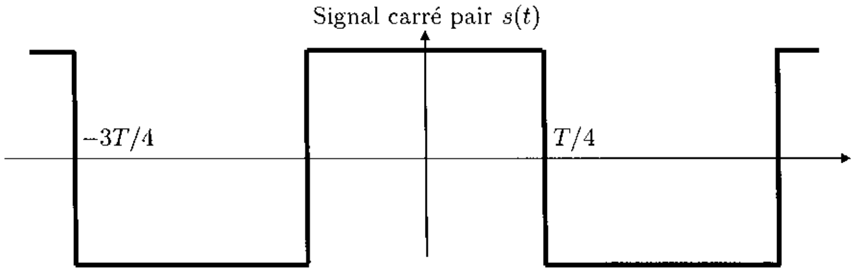
• **Exercice 2** - *Séries de Fourier*

Soit le signal périodique $s(t)$ représenté ci-dessous.

2.1 Calculez les $\{a_0, a_n, b_n\}_{n\in\mathbb{Z}^+}$ ou les $\{c_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ de la décomposition de $s(t)$:

$$\left\{\begin{array}{lcl} \{a_n & = & \frac{2}{T}\int_T s(t)\cos n\omega t\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}^+} \\ \{b_n & = & \frac{2}{T}\int_T s(t)\sin n\omega t\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}^{*+}} \\ \{c_n & = & \frac{1}{T}\int_T s(t)e^{-jn\omega t}\ dt\}_{n\in\mathbb{Z}} \end{array}\right. \tag{2}$$

Signal carré pair $s(t)$



2.2 Reconstruisez le signal $s(t)$ à partir des coefficients calculés précédemment:

$$\left\{\begin{array}{lcl} s(t) & = & \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{jn\omega t} \\ s(t) & = & \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos n\omega t + \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin n\omega t \end{array}\right. \tag{3}$$

2.3 Comparez la fréquence du motif du signal carré et les fréquences des harmoniques qui constituent, au sens de Fourier, ce signal carré.

• **Exercice 3** – *Echantillonnage et filtrage dans l'espace de Fourier*

3.1 Considérez le signal carré $s(t)$ de l'exercice précédent avec $T = 1ms$. Que se passe-t-il lors de l'échantillonnage de ce signal pour obtenir $s_d[k]$ avec une fréquence d'échantillonnage f_e ?

3.2 Comment choisir la fréquence f_e ? Proposez un choix et justifiez-le.

3.3 Que devient le contenu harmonique de $s_d[k]$? Donnez la liste des fréquences contenues dans $s_d[k]$

• **Exercice 4** – *Transformée de Fourier à Temps Discret*

4.1 Soit la réponse impulsionnelle $h[k] = [1 \;\; 2 \;\; \underline{0} \;\; -2 \;\; -1]/1$. Par souci de simplification, nous prendrons ici $T_e = 1$: calculez sa TFTD $H(\omega)$:

$$H(\omega) \quad = \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} h[k] e^{-j\omega k T_e} \tag{4}$$

4.2 Tracez $|H(\omega)|$ ou $|H(f)|$

4.3 Quel est le comportement fréquentiel de ce filtre h ? Comparez avec celui du filtre $[1 - 1]$.