

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

ÉVALUATION TERMINALE SECONDE SESSION

Durée : 1H50

Documents autorisés : reproduction papier des
diapositives de cours et notes manuscrites
personnelles

Liminaires

Inscrivez sur votre copie d'examen, et recopiez sur vos feuilles annexes et intercalaires éventuelles, dans les cases **N° d'anonymat**, un pseudonyme composé de trois lettres et trois chiffres tous différents que vous choisirez à votre guise.

Si vous utilisez des feuilles intercalaires, numérotez **1R** le recto de la première et **1V** son verso, **2R** le recto de la deuxième et **2V** son verso, etc... Reportez, dans la case prévue à cet effet sur la copie double, le nombre d'intercalaires utilisées sans compter la feuille annexe.

Si vous êtes amené à utiliser à plusieurs reprises des méthodes numériques propres à un domaine particulier, il vous est demandé de mentionner l'étendue de vos connaissances en variant les méthodes employées.

1 Questions de cours

1.1 Questionnaire simple

15 Donnez une réponse courte (un mot, une phrase ...) aux questions suivantes.

1.1.1 Quelle est la condition d'existence d'une racine de la fonction $f(x)$ dans l'intervalle $[x_G, x_D]$?

1.1.2 Qu'est ce que la matrice de JACOBI?

20 1.1.3 Quelle est la définition de l'*epsilon machine*?

1.1.4 Quelle est la base des polynômes utilisés dans l'approximation polynomiale?

1.1.5 Quel est l'usage de l'algorithme de NEVILLE?

1.1.6 Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires.

1.1.7 Quelles sont les plus petit et plus grand nombres entiers signés codables sur un octet?

1.1.8 Quelle type de méthodes numériques permet de déterminer la valeur moyenne d'une fonction entre deux bornes?

30 1.1.9 Est-il pertinent de vérifier l'égalité d'un nombre réel à zéro?

1.1.10 Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de GAUSS?

1.1.11 À quel type de problèmes appartient l'équation $A\vec{x} = \vec{b}$ où A est une matrice?

35 1.1.12 Quelle astuce algorithmique permet de réutiliser les calculs antérieurs lors des itérations de la méthode des trapèzes?

1.1.13 Pourquoi doit-on parfois intégrer numériquement une fonction?

1.1.14 Existe-t-il une ou plusieurs méthodes numériques permettant de résoudre l'équation $f(x) = a$ et, si oui, citez en une.

1.2 Règle et crayon

40 Reportez, sur la feuille annexe, les trois premières positions, notées $X_N^{\{0\}}$, $X_N^{\{1\}}$ et $X_N^{\{2\}}$, de la recherche du zéro de la fonction $f(x)$ par la méthode de NEWTON.

2 Programmation

45

2.1 Porte-conteneurs

Embauché au sein d'une société de transports par navires porte-conteneurs, vous avez pour mission la planification des chargements des navires.

Les critères¹ permettant d'établir un chargement sont, en unités adimensionnelles :

- le nombre total de conteneurs égal à 100 ;
- le volume total occupé par les conteneurs égal à 245 ;
- la masse totale des conteneurs égale à 600 ;
- le coût de chargement des conteneurs égal à 305.

55

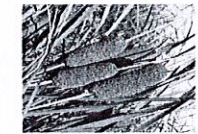
Les conteneurs sont de types différents : leurs caractéristiques sont détaillées dans le tableau suivant, en unités adimensionnelles :

Type	Volume	Masse	Coût
Lourd	1	15	6
Grand Léger	4	5	3
Petit Léger	2	3	2
Vide	1	1	0

60

Rédigez le programme C permettant de déterminer la répartition des conteneurs entre les différents types. Vous devez concevoir votre programme pour que les critères de choix soient aisément modifiables.

2.2 Prolifération du Typha



Les *massettes* ou *Typhas* sont des plantes monocotylédones, également appelées *quenouilles*, typiques des bords des eaux calmes, des fossés, des lacs, des marais et plus généralement dans les milieux humides. Elles poussent en colonies denses dans les roseières, formant, lorsque cette formation végétale n'est formée que de massettes, une *typhaie*. Typha est l'un des deux ou trois genres de la famille des *Typhacées*².

65

Le Typha peut proliférer par reproduction sexuée (graine) ou par multiplication végétative (rhizome).

Dans un article publié en 2010³, Mamadou Lamine DIAGNE propose un modèle d'étude de la prolifération de cette plante sous la forme du système d'équations différentielles ordinaires suivant :

$$\begin{cases} \dot{e}_g(t) = c_g(t)a(t)(1-x(t)) - (\gamma_g + \mu_g)e_g(t) \\ \dot{e}_r(t) = c_r a(t)(1-x(t)) - (\gamma_r + \mu_r)e_r(t) \\ \dot{a}(t) = \gamma_g e_g(t) + \gamma_r e_r(t) - \mu_a a(t) \end{cases}$$

70

où $e_g(t)$ est la proportion de pousses provenant de la reproduction sexuée, $e_r(t)$ est la proportion de pousses provenant de la multiplication végétative, $a(t)$ est la proportion de plantes adultes, $x(t) = a(t) + e_g(t) + e_r(t)$ est la proportion totale de plantes, $c_g(t)$ est le coefficient de reproduction sexuée, c_r est le coefficient de multiplication végétative, μ_g , μ_r et μ_a sont les coefficients de mortalité, γ_g et γ_r sont les coefficients de maturation, c-à-d de passage de l'état de pousse à l'état adulte.

75

Afin de modéliser le fait que les graines ne sont produites et ne germent que durant une partie α de l'année, le coefficient $c_g(t)$ est supposé suivre la loi de périodicité annuelle :

$$c_g(t) = \begin{cases} c_g^A & \text{si } t \in [0, \alpha] \\ 0 & \text{si } t \in [\alpha, 12] \end{cases}$$

l'unité de temps étant le mois.

80

Rédigez le programme C simulant l'évolution sur 150 ans des Typhas, pour les valeurs numériques $c_g^A = 0,02$, $c_r = 0,01$, $\gamma_g = 0,17$, $\gamma_r = 0,17$, $\mu_g = 0,04$, $\mu_r = 0,04$, $\mu_a = 0,014$ et $\alpha = 0,67$.

1. Dans le monde réel, ces critères seraient des inégalités et le problème relèverait du domaine de l'optimisation.

3. "Un modèle mathématique de la prolifération du Typha", ARIMA, CART10, Volume 1, pp 1-8