Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Calcul intégral

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Examen - 3 janvier 2022
durée : 2h

Notations. La tribu des boréliens de $\mathbb{R}$ est notée $\mathscr{B}(\mathbb{R})$. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ est notée λ. La mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$ est notée λ_2. Pour alléger les notations on notera $\mathrm{d}t$ à la place de $\mathrm{d}\lambda(t)$, et $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ à la place de $\mathrm{d}\lambda_2(x,y)$.

EXERCICE 1. On note $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la translation définie par $T(x) = x + 2\pi$. Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}$ est 2π-*périodique* s'il satisfait la condition : $(x \in A) \iff (T(x) \in A)$. On note $\mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R})$ l'ensemble de tous les sous-ensembles 2π-périodiques de $\mathbb{R}$, et $\mathscr{B}_{2\pi}(\mathbb{R}) = \mathscr{P}_{2\pi}(\mathbb{R}) \cap \mathscr{B}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que le seul sous-ensemble 2π-périodique borné de $\mathbb{R}$ est $\varnothing$.
2. Montrer que $\mathscr{B}_{2\pi}(\mathbb{R})$ est une tribu sur $\mathbb{R}$.
3. Pour tout $A \in \mathscr{B}_{2\pi}(\mathbb{R})$, on pose $\mu(A) = \lambda\big([-\pi,\pi[\cap A\big)$.
   (a) Montrer que μ est une mesure finie sur $\big(\mathbb{R}, \mathscr{B}_{2\pi}(\mathbb{R})\big)$.
   (b) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que $T^n(t) \in [-\pi,\pi[$.
   (c) En déduire que pour tout $A \in \mathscr{B}_{2\pi}(\mathbb{R})$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\lambda\big([t, t+2\pi[\cap A\big) = \mu(A)$.
   Indication : utiliser l'invariance de λ par la translation T.

***

EXERCICE 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \cos x \,\mathrm{e}^{-(x+\sin^n x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que I_n a bien un sens.
2. Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$. *Indication : on pourra utiliser les nombres complexes ou intégrer par parties.*

***

EXERCICE 3. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+$ par $f(x,t) = \dfrac{1}{(1+(tx)^2)(1+x^2)}$

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.
2. On pose $H(t) = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x,t)\,\mathrm{d}x$.
   (a) On suppose que $t \neq 1$. Calculer $H(t)$. *Indication : on pourra décomposer $f(x,t)$ en éléments simples.*
   (b) Calculer la valeur de $H(1)$ en justifiant.

***

EXERCICE 4. On note $T_1 = \{(x,y) \in [0;1]^2 : y \leq 1-x\}$ et $T_2 = \{(x,y) \in [0;1]^2 : y > 1-x\}$ et on pose

$$I = \int_{[0;1]^2} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad I_1 = \int_{T_1} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \qquad I_2 = \int_{T_2} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

1. ***Calcul préliminaire.*** Soit $a > 0$. Calculer $\displaystyle\int_0^x \frac{1}{a^2+t^2}\,\mathrm{d}t$
2. Montrer que $I = \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = \zeta(2)$.
3. Représenter graphiquement T_1 et T_2.
4. On pose $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{y-x}{2}$ et on note $\varphi : (x,y) \mapsto (u,v)$.
   (a) Déterminer et représenter graphiquement $E_1 = \varphi(T_1)$ et $E_2 = \varphi(T_2)$.
   (b) Montrer que $I_1 = 4\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^u \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$ et $I_2 = 4\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 \left(\int_0^{1-u} \frac{1}{1-u^2+v^2}\,\mathrm{d}v\right)\mathrm{d}u$.
   (c) En utilisant la question 1 et le changement de variable $u = \sin\theta$, calculer I_1.
   (d) On admet que $I_2 = \frac{\pi^2}{9}$. Calculer $\zeta(2)$.
5. *Question bonus (hors barème).* Montrer que $I_2 = \frac{\pi^2}{9}$.