Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Juin 2022

CALCUL DIFFERENTIEL - DEUXIÈME SESSION

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(6 pts)*

Soit $p > 0$ un entier. On considère un intervalle ouvert $I \subseteq \mathbb{R}$ et une application $f\colon I \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^p$ de classe $\mathcal{C}^1$. On pose $\Delta = \{(x, x), x \in I\}$.

On définit l'application $g : I \times I \to \mathbb{R}^n$ par

$$g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(y)}{x - y} & \text{si } x \neq y \\ f'(x) & \text{si } x = y. \end{cases}$$

1. ***(2 pts)*** Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $(I \times I) \setminus \Delta$.
2. ***(2 pts)*** Montrer que g est continue sur $I \times I$.
3. ***(2 pts)*** Montrer sur un exemple que g n'est pas nécessairement différentiable en tout point de Δ.

II *(7 pts)*

Soit $p > 0$ un entier. On désigne par $\langle x, y\rangle$ le produit scalaire euclidien de deux éléments $x, y \in \mathbb{R}^p$ et par $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ la norme euclidienne d'un élément $x \in \mathbb{R}^p$. Soit $f\colon \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^p$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ telle qu'il existe $\alpha > 0$ avec

$$\langle \mathrm{d}_x f(h), h\rangle \geq \alpha \|h\|^2$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $h \in \mathbb{R}^p$.

1. ***(1 pt)*** Montrer que pour $a, b \in \mathbb{R}^p$ on a
$$\langle f(b) - f(a), b - a\rangle \geq \alpha \|b - a\|^2.$$
On pourra considérer la fonction $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \langle f(tb + (1-t)a), b - a\rangle$.
2. ***(2 pts)*** Montrer que l'image par f de tout sous-ensemble fermé de $\mathbb{R}^p$ est également un ensemble fermé de $\mathbb{R}^p$ (on pourra montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy est également de Cauchy).
3. ***(1 pt)*** Déduire de l'hypothèse sur f que, pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, l'application $\mathrm{d}_x f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p)$ est injective.
4. ***(2 pt)*** En déduire que $f(\mathbb{R}^p)$ est ouvert.
5. ***(1 pt)*** En déduire que f est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^p$ sur $\mathbb{R}^p$.

III *(7 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z - y^2 + 2xy - x^2 - 2x + y = 0\}$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{S}$ est en tout point une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
2. ***(2 pts)*** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(t, 2t, t^2) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ est une courbe, c'est à dire en tout point une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'espace tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t_0) = (t_0, 2t_0, t_0^2)$.
3. ***(1 pt)*** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}_t$ passant par le point $M(t) = (t, 2t, t^2)$ et dirigée par le vecteur $u = (1, 1, 1)$ est contenue dans $\mathcal{S}$.
4. ***(2 pts)*** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les plans tangents à $\mathcal{S}$ en deux points quelconques de la droite $\mathcal{D}_t$ sont parallèles.