Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2022

CALCUL DIFFERENTIEL - CONTRÔLE TERMINAL

Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.

I *(7 pts)*

1. ***(2 pts)*** Montrer que pour pour tout $\lambda \in \left]-1,1\right[$, la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda(x) = \cos(\lambda x)$ admet un unique point fixe $\varphi(\lambda) \in \mathbb{R}$.
2. ***(1 pt)*** Montrer que la fonction $\varphi\colon \left]-1,1\right[\to \mathbb{R}$ est continue.
3. ***(2 pts)*** On considère la fonction $F\colon \left]-1,1\right[\times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(\lambda, x) = x - \cos(\lambda x)$. Montrer que le Théorème des fonctions implicites s'applique à l'équation $F(\lambda, x) = 0$ en tout point $(\lambda, \varphi(\lambda))$, $\lambda \in \left]-1,1\right[$.
4. ***(1 pt)*** En déduire que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left]-1,1\right[$.
5. ***(1 pt)*** Calculer le développement de Taylor à l'ordre 2 de φ au point $\lambda = 0$.

II *(7 pts)*

Pour $n \geq 1$, soit $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace des matrices carrées réelles de taille n, et soit $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \subset \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ le sous-ensemble des matrices inversibles. Soit $f\colon \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'application définie par $f(M) = M^4$.

1. ***(1 pt)*** Rappeler pour quoi $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est un ensemble ouvert et pourquoi f est une application différentiable sur $\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.
2. Soit $A \in \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.
   (a) ***(2 pts)*** Pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, calculer $\mathrm{d}_A f(H)$.
   (b) ***(2 pt)*** Montrer que f est un difféomorphisme local en $A = \mathrm{Id}_n$.
3. ***(1 pt)*** Montrer que $f(\mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})) \subseteq \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$.
4. ***(1 pt)*** L'application $f\colon \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R}) \to \mathrm{Gl}_n(\mathbb{R})$ est-elle un difféomorphisme ?

III *(6 pts)*

On considère l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{S} = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z - y^2 + 2xy - x^2 - 2x + y = 0\}$.

1. ***(2 pts)*** Montrer que $\mathcal{S}$ est en tout point une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
2. ***(1 pt)*** Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(t, 2t, t^2) \in \mathbb{R}^3 : t \in \mathbb{R}\}$ est une courbe, c'est à dire en tout point une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'espace tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t_0) = (t_0, 2t_0, t_0^2)$.
3. ***(1 pt)*** Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}_t$ passant par le point $M(t) = (t, 2t, t^2)$ et dirigée par le vecteur $u = (1,1,1)$ est contenue dans $\mathcal{S}$.
4. ***(2 pts)*** Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les plans tangents à $\mathcal{S}$ en deux points quelconques de la droite $\mathcal{D}_t$ sont parallèles.