Université de Bourgogne
Année universitaire : 2021/2022

Licence3 SPI parcours électronique

Examen de d'Automatique/Robotique

Durée : 2H.
Documents non autorisés

Exercice 1

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^3 + x_2 + 3u \\ \dot{x}_2 = -2x_1 \end{cases} \qquad (1)$$

1) Trouver le point de fonctionnement (x_1^*, x_2^*, u^*) du système. Vérifier que le triplet $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, 3, -1)$ correspondant à un point de fonctionnement.
2) Démontrer que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (0, -1, \frac{1}{3})$ donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} \delta u \qquad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix} U \qquad (3)$$

Où $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ est le nouveau vecteur de variables d'état et U est la nouvelle commande.

3) Analyser la stabilité du système (3) en calculant ses valeurs propres.
4) Trouver le gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande *u=-KX* qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont (-3, -2).

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas :

a) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b) $Y = \dfrac{X_2}{5}$

5) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas.
6) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont (-4, -3). Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\dot{X}_1(t)\\ \dot{X}_2(t)\\ \dot{X}_3(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0.1 & 0 & 0\\ 0 & -4 & 0\\ 3 & 0 & 15\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\\ X_3(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}2\\ 0\\ 0\end{bmatrix}U(t) \qquad (4)$$

1) Est ce que la variable $X_3(t)$ est commandable ? Justifier.

2) Donner l'expression de la solution de la variable $X_2(t)$ dans le cas d'une entrée quelconque, un $t_0=0$ et un état initial $X(t_0)=\begin{bmatrix}10\\ 3\\ 20\end{bmatrix}$.

3) Est ce que la variable $X_2(t)$ est stable ? justifier.

4) Donner la solution $X_1(t)$ dans le cas : $U(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (5)

5) A partir de l'équation (4), donner $X\left((k+1)T_e\right)$ en fonction de $X\left(kT_e\right)$ et $U\left(kT_e\right)$ en utilisant l'approximation de Euler

Rappel

Soit l'équation différentielle ordinaire : $\begin{cases}\dfrac{dx(t)}{dt}=Ax(t)+Bu(t), \quad \dim\left(x(t)\right)=N\times 1 & (6)\\ y(t)=Cx(t) & (7)\end{cases}$

- Formule d'Euler : $\begin{cases}x(t)\rightarrow x(kT_e) & (8)\\ u(t)\rightarrow u(kT_e) & (9)\\ \dfrac{dx(t)}{dt}=\dfrac{x\left((k+1)T_e\right)-x\left(kT_e\right)}{T_e} & (10)\end{cases}$
- Critère d'observabilité ➔ calcul du $rang\begin{pmatrix} C & CA & \cdots & CA^{N-1}\end{pmatrix}^T$ (11)
- Calcul du gain de l'observateur L : $\det\left(sI_{N\times N}-\left(A-LC\right)\right)=P_{desiré\_obs}(s)$ (12)
- Critère de commandabilité ➔ calcul du $rang\begin{pmatrix} B & AB & \cdots & A^{N-1}B\end{pmatrix}$ (13)
- Calcul du gain de la commande K : $\det\left(sI_{N\times N}-\left(A-BK\right)\right)=P_{desiré\_com}(s)$ (14)
- Solution de l'équation (6) : $x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)+\int_{t_0}^{t}e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)\,d\tau$ (15)