L3 MATHS

2021/22

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (7 janvier 2022)

Temps : 3h00

1. (Décomposition QR et algorithme QR) **[4 points]**

   i) Énoncer et démontrer le théorème de décomposition QR d'une matrice. **[2 points]**

   ii) Expliciter l'algorithme QR pour le calcul de valeurs propres et énoncer le théorème qui garantit sa convergence. **[1 point]**

   iii) Étant donnée la matrice A

   $$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

   est-ce qu'on peut appliquer le théorème dans le point ii) ? Quelle est la décomposition QR de A ? **[1 point]**

2. (Méthodes itératives) **[6 points]**

   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}^n$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}}$ de vecteurs définie par

   $$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a \in \mathbb{R}$ arbitraire

   $$A = \begin{pmatrix} a & -1 \\ -1 & a \end{pmatrix}.$$

   i) Déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson **[2 points]**, Jacobi **[1 point]** et Gauss-Seidel **[1 point]**.

   ii) Pour quelle méthode la convergence est la "plus rapide" ? Est-ce qu'il existe un choix du paramètre qui rend la convergence de la méthode de Richardon plus rapide que celle de Jacobi ? **[0.5 points]**.

   iii) Soit $||\cdot||$ la norme matricielle induite associée à une norme $||\cdot||$ sur $\mathbb{R}^n$. Si l'erreur au pas k est défini par $e^{(k)} = x^{(k)} - x$, montrer que si $||B|| < 1$ et k satisfait

   $$k \geq \frac{\ln\left(\frac{1-||B||}{||x^{(1)}-x^{(0)}||}\right) - N\ln(10)}{\ln(||B||)},$$

   alors $||e^{(k)}|| < 10^{-N}$. **[1.5 points]**

3. (Stabilité de valeurs propres) **[6 points]**

   i) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer et démontrer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $||\cdot||_\infty$ de C. **[3 points]**

ii) Étant données deux matrices $O_1 \in M_n(\mathbb{R})$ et $O_2 \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonales, c'est à dire, $O_1 O_1^t = \mathbb{I}_n$ et $O_2 O_2^t = \mathbb{I}_n$, utiliser le résultat du point i) pour donner une condition suffisante sur $\epsilon > 0$, en fonction de la dimension $n \in \mathbb{N}$, pour garantir que la matrice

$$O(\epsilon) = O_1 + \epsilon O_2 \ ,$$

soit inversible. **[3 points]**

4. (Systèmes non-linéaires) **[4 points]**
   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. **[2 points]**
   ii) Étant donnés $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixes et les inconnues u, v et ϕ, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système **[1 point]** :

$$\begin{cases} u\, v \cos\phi = a \\ u\, v \sin\phi = b \\ \frac{1}{2}(u^2 - v^2) = c \end{cases}$$

   iii) Discuter la convergence de l'algorithme en fonction des valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$. **[1 point]**