Université de Bourgogne
Département de mathématiques
UFR Sciences et Techniques

Licence 3 : 2021 - 2022
Analyse fonctionnelle

Examen

temps de composition 3h – tout document et appareil électronique interdit

Exercice 1.

1. Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel. Établir l'identité du parallélogramme : pour tout $x, y \in \mathcal{H}$, on a
$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$
2. Trouver deux fonctions $f, g \in L^1([0,1])$ qui ne satisfont pas l'identité du parallélogramme.
3. Idem dans $L^\infty([0,1])$.

Exercice 2. Soit $f \in L^2([-\pi,\pi])$ la fonction définie par $f(x) = e^x$.

1. Calculer la norme L^2 de f.
2. Calculer les coefficients de Fourier $\widehat{f}(n) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx$.
3. Utiliser les résultats précédents pour déterminer la somme de la série $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{1+n^2}$.

Exercice 3. On considère l'espace de Hilbert complexe
$$\ell^2(\mathbb{Z}) = \left\{ z = (z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{Z}} : \sum_{n\in\mathbb{Z}} |z_n|^2 < \infty \right\}.$$
et le sous-espace
$$h^1(\mathbb{Z}) = \left\{ z \in \ell^2(\mathbb{Z}) : \sum_{n\in\mathbb{Z}} n^2 |z_n|^2 < +\infty \right\}.$$
Pour tout $w, z \in h^1(\mathbb{Z})$, on définit
$$\langle w, z \rangle = \sum_{n\in\mathbb{Z}} (1+n^2)\, w_n \overline{z_n}.$$

1. Montrer que $\langle \cdot, \cdot \rangle : h^1(\mathbb{Z}) \times h^1(\mathbb{Z}) \to \mathbb{C}$ est un produit scalaire hermitien, et que $h^1(\mathbb{Z})$ muni de ce produit scalaire est un espace de Hilbert.
2. Montrer que $h^1(\mathbb{Z})$ est un sous-espace dense de $\ell^2(\mathbb{Z})$.

Exercice 4. On note $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ le tore. Les fonctions $u : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ peuvent être identifiées aux fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ de période 2π. On rappelle le théorème de Poisson.

Theorem (Poisson). *Soit $u \in C^0(\mathbb{T};\mathbb{C})$ une fonction continue telle que $\sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}(n)| < \infty$. Alors, la série de Fourier $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \widehat{u}(n)\, e^{inx}$ converge uniformément vers u dans $C^0(\mathbb{T};\mathbb{C})$.*

1. Montrer que pour toute fonction $u \in L^2([0,2\pi])$, on a $\|u\|_2 \leq \sqrt{2\pi}\, \|u\|_\infty$.
2. Montrer que si $u \in C^k(\mathbb{T};\mathbb{C})$ est une fonction de classe C^k, alors $\widehat{u^{(k)}}(n) = (in)^k\, \widehat{u}(n)$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$, où $u^{(k)}$ dénote la dérivée k-ième de u.
3. Soit $u \in C^1(\mathbb{T};\mathbb{C})$ telle que $\widehat{u}(0) = 0$. En utilisant la relation de Parseval et l'identité précédente, montrer que $\|u\|_2 \leq \|u'\|_2$.
4. Soit $u \in C^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$ une fonction de classe C^2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, on a
$$|\widehat{u}(n)| \leq \frac{\sqrt{2\pi}}{n^2}\, \|u''\|_\infty.$$
5. En déduire que si $u \in C^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$, alors sa série de Fourier converge uniformément vers u dans $C^0(\mathbb{T};\mathbb{C})$, et que
$$\|u\|_\infty \leq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n\in\mathbb{Z}} |\widehat{u}(n)|.$$
6. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que pour toute fonction $u \in C^2(\mathbb{T};\mathbb{C})$ vérifiant $\widehat{u}(0) = 0$, on a $\|u\|_\infty \leq C\|u'\|_2$.